

Die Berechnung von
Minimalflächen, Seifenblasen,
Membrane und Pneus
aus geodätischer Sicht

Dipl.-Ing. P. Singer

Universität Stuttgart
Institut für Anwendungen der Geodäsie im Bauwesen
Pfaffenwaldring 7A
70569 Stuttgart

Juli 1995

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung und Zielsetzung	5
1.1	Bezeichnungen und Definitionen	7
1.1.1	Der Punkt	7
1.1.2	Die Strecke	7
1.1.3	Das Dreieck	8
1.1.4	Der Tetraeder	9
1.1.5	Das Netz	11
2	Flächen, Seifenhäute und Membrane in diskreter Form	12
2.1	Verformung des Dreiecks	13
2.2	Minimalflächen und Seifenhäute	16
2.2.1	Minimalflächen	16
2.2.2	Seifenhäute	17
2.3	Geschlossene Minimalflächen und Seifenblasen	18
2.3.1	Geschlossene Minimalflächen bei vorgegebenem Kammervolumen	18
2.3.2	Seifenblasen	19
2.4	Membrane mit vorgegebener Randkurve	19
2.4.1	St.-Venant-Kirchhoff-Material	19
2.4.2	Nichtlineares Materialverhalten	20
2.4.3	Bestimmung der Gleichgewichtsfigur	20
2.4.4	Membrane mit isotropem Material (Typ 1)	22
2.4.5	Membrane mit orthotropem Material (Typ 2)	22
2.4.6	Kräfteverlauf im Dreieck	24
2.4.7	Vergleich zwischen erstem (Typ 1) und zweitem (Typ 2) Membranelement	24
2.5	Druckbelastete Membrane (Pneus)	24
2.5.1	Bestimmung der Gleichgewichtsfigur	25
3	Dreiecksnetze im Computer	26
3.1	Zur Ausgleichung großer Netze	26
3.1.1	Das Verfahren der konjugierten Gradienten	26
3.1.2	Beispiel zu Hyper-Sparse-Matrizen	27
3.1.3	Zur Skalierung von Gleichungssystemen mit Submatrizen	28
3.2	Datenorganisationsverfahren	30
3.3	Generierungsoperatoren	32

4 Anwendungen	34
4.1 Allgemeine Bemerkungen	34
4.1.1 Äußere Lasten	34
4.1.2 Spannungen	35
4.2 Beispiele zu Minimalflächen	35
4.3 Beispiele zu Seifenblasen	39
4.4 Beispiele zu Membrane	42
4.4.1 Grundlagen zur Membranberechnung	42
4.4.2 Methoden zur Membranberechnung	44
4.5 Beispiele zu Pneus	47
4.6 Beispiele zur Gleichungslösung	49
4.7 Genauigkeitsabschätzungen und Diskretisierungsfehler	51
5 Analogiebetrachtungen	54
5.1 Vergleich zwischen der Seilnetz- und der Membranberechnung	54
5.2 Übergang von der Membrane zur Seifenhaut bzw. Minimalfläche	55
5.3 Die Ausgleichsrechnung in der Elastomechanik	56
5.4 Die Methode der finiten Elemente im Vergleich	57
6 Schlußbemerkungen	59
A Die Ausgleichsrechnung	60
A.1 Die allgemeine nichtlineare Ausgleichsrechnung	60
A.2 Die Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen	62
A.3 Die Ausgleichung nach bedingten Beobachtungen	63
A.4 Die Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen mit Bedingungen zwischen den Unbekannten	64
A.5 Die Ausgleichung nach bedingten Beobachtungen mit Unbekannten	64
B Beweise	65
B.1 Kräfteverlauf im Dreieck bei Minimalflächen	65
B.2 Invariante Steifigkeitsmatrizen bei isotropem Material	67
B.3 Übergang von der Membran zur Minimalfläche	68
Literaturverzeichnis	70

Einleitung und Zielsetzung

Minimalflächen, Seifenblasen, Membrane und Pneus kommen häufig in Natur und Technik vor. Obwohl ihre Formenvielfalt nahezu unbegrenzt ist, können sie durch scheinbar einfache Konstruktionsprinzipien beschrieben werden. Während Minimalflächen und Membrane innerhalb eines geschlossenen Randes ebene oder zweiseitig sattelförmig gekrümmte Flächen darstellen, handelt es sich bei Seifenblasen und Pneus um zweiseitig gleichseitig gekrümmte Flächen, die einen Körper umschließen.

Die vorliegende Arbeit beinhaltet Methoden, die das Erstellen eines diskreten Computermodells von Minimalflächen, Seifenblasen, Membranen und Pneus in ihrer Formenvielfalt ermöglicht. Zum Modell gehören die Beschreibung der geometrischen und physikalischen Eigenschaften dieser Gebilde. Grundlage hierfür ist die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate auf netzartige Strukturen und ihre entsprechende Interpretation.

Aus den Erfahrungen der Seilnetzberechnung aufbauend umfaßt diese Arbeit folgende Themenbereiche: Geometrie und Elastomechanik, Datenverarbeitung und Numerische Mathematik, Netztheorie und nichtlineare Ausgleichsrechnung. Alle Themen greifen ineinander über und bilden ein kompaktes System, das in seiner Gesamtheit zu bewerten ist. Zur Verdeutlichung der logischen Gedankengänge und zur besseren Übersicht ist dennoch die Trennung in einzelne Kapitel vollzogen worden. Für die Gestaltung der Arbeit liegen folgende Überlegungen zugrunde.

Zuerst werden in Kapitel 1 die mathematischen Formulierungen und Ableitungen anhand einfacher geometrischer Elemente vorgestellt. Diese Elemente bilden gleichzeitig das Gerüst für Datenorganisationsverfahren aus der numerischen Mathematik, die in Kapitel 3 genannt werden. Die Angabe der Einheiten bei den Symbolen und Gleichungen ist insbesondere beim Übergang von der geometrischen zur mechanischen Betrachtungsweise vorteilhaft.

Die Anwendung der nichtlinearen Ausgleichsrechnung erstreckt sich auf weite Bereiche in Natur und Technik und geht über die hier aufgeführten Lösungsstrategien hinaus. Deshalb stehen die wichtigsten Beziehungen in einer Art Formelsammlung gesondert im Anhang A. Sie sind grundlegend für die mathematischen Herleitungen von Minimalflächen, Seifenblasen, Membrane und Pneus.

In Kapitel 2 beziehen sich die Formeln, im Gegensatz zur bisherigen Darstellungsweise bei der Seilnetzberechnung, genau auf ein einzelnes Element, das stellvertretend für alle Elemente des Netzes ist. Die Matrizenschreibweise ermöglicht eine knappe Formulierung des Sachverhalts und schärft den Blick für Analogiebetrachtungen zwischen Minimalflächen und Membrane, Seifenblasen und Pneus einerseits und deren geometrischen und physikalischen Eigenschaften andererseits. Beweise, denen einige Schlußfolgerungen zugrunde liegen, befinden sich im Anhang B.

Die Auswirkungen der Kraftdichtemethode in der Seilnetzberechnung werden als bekannt vorausgesetzt. Der Begriff Formfindung steht in dieser Arbeit als mathematische Bezeichnung für die Berechnung des Computermodells in einem linearen Rechenschritt, wobei Festpunkte, Topologie und Kraftdichten des Netzes vorgegeben sind. Als invariante Größen werden diejenigen Variablen bezeichnet, deren Wert unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems ist, z.B. der Abstand zweier Punkte.

Die Umsetzung der gewonnenen theoretischen Erkenntnisse in die Welt des Computers ist das Ziel des dritten Kapitels. Neue effiziente Algorithmen aus dem Bereich der numerischen Mathematik und der Datenverarbeitung werden dort vorgestellt und an Beispielen ausführlich erläutert. Das Zusammenführen verschiedener Datenstrukturen erfordert umfangreiche Konsistenzprüfungen und es wurde ein Programmsystem entwickelt, das alle theoretischen und praktischen Anforderungen in diesem Rahmen erfüllt.

Aus der Sicht des Ingenieurs ist die wissenschaftliche Tätigkeit unbefriedigend, falls sie keine Anwendung findet. Ohne auf besondere Ästhetik zu achten, werden in Kapitel 4 solche Beispiele aufgeführt,

die den Sachverhalt möglichst klar verdeutlichen. Die Darstellung aller Computermodelle in ihrer Formenvielfalt, die mit diesem System bisher entwickelt wurden, würde den Umfang dieser Arbeit sprengen.

Analogiebetrachtungen ordnen im fünften Kapitel diese Arbeit in bereits bekannte Veröffentlichungen ein. Dem Autor ist bewußt, daß es viele Möglichkeiten gibt, Computermodelle auf verschiedene Arten zu erzeugen.

In Kapitel 6 stehen die wichtigsten Erkenntnisse in zusammengefaßter Form. Abschließend sei zu nennen, daß es dem Autor ein besonderes Anliegen ist, die moderne Anwendung der nichtlinearen Ausgleichsrechnung zur Formfindung und statischen Berechnung von vorgespannten Flächen mit oder ohne Innendruck verständlich zu erklären. Aus der Vielzahl der Veröffentlichungen, die zu diesem Thema erschienen sind, tragen besonders die Arbeiten von Linkwitz, Scheck, Gründig, Bahndorf, Neureither und Ströbel zum Verständnis dieses Werkes bei [44], [71], [23], [3], [56], [80].

In [12] und [58] ist die mathematische Theorie der Minimalflächen umfassend dargestellt. Dort werden u.a. Existenz- und Eindeutigkeitsfragen behandelt, aber auch zahlreiche numerische Ergebnisse von Computersimulationen mitgeteilt, die von einem kontinuierlichen Modell ausgehen. Demgegenüber beruht die vorliegende Arbeit à priori auf einem diskreten Modell, bei dem die gesuchte Minimalfläche durch ebene Dreiecksflächen approximiert wird.

1.1 Bezeichnungen und Definitionen

Das Aufzählen der nachfolgenden geometrischen Elemente finden wir in alten Vorlesungsskripten z.B. [35]. Ihre mathematischen Beschreibungen werden auf die moderne Matrizenschreibweise übertragen. In analoger Form kommen sie bei den Datenorganisationsverfahren in Kapitel 3.2 vor.

Im einzelnen bedeuten: kleine und große dünne Buchstaben Skalare, kleine unterstrichene dicke Buchstaben Vektoren und große dicke Buchstaben i.a. Matrizen [88].

1.1.1 Der Punkt

Der Punkt P ist definiert durch seine Punktnummer und die Koordinaten x, y, z im kartesischen Koordinatensystem.

$$\bullet P(x, y, z)$$

Abb. 1.1.1 Der Punkt

Fassen wir die Koordinaten zu einem Vektor \underline{x} zusammen, so erhalten wir z.B für den Punkt $P_1(x_1, y_1, z_1)$ den Ortsvektor

$$\underline{x}_{1(1,3)}^T = [x_1, y_1, z_1] \quad [m]. \quad (1.1)$$

Die Werte in den runden Klammern geben die Anzahl der Zeilen und Spalten an. Der Punkt wird auch als Knoten bezeichnet, sofern er ein Teil eines Netzes ist.

1.1.2 Die Strecke

Der Abstand zweier Punkte im Raum ist als Strecke definiert. Die Richtung der Strecke spielt in dieser Betrachtungsweise keine Rolle.

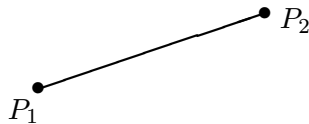


Abb. 1.1.2 Die Strecke

Die Koordinaten des Anfangs- und Endpunktes $P_1(x_1, y_1, z_1)$ und $P_2(x_2, y_2, z_2)$ werden ebenfalls zu einem Vektor zusammengefaßt

$$\underline{x}_{(1,6)}^T = \left[\underline{x}_1^T \quad \underline{x}_2^T \right] = [x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2] \quad [m]. \quad (1.2)$$

Die Länge der Strecke zwischen den Punkten P_1 und P_2 ergibt sich aus

$$l_1 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} = \sqrt{u_{12}^2 + v_{12}^2 + w_{12}^2} \quad [m]. \quad (1.3)$$

Ganz allgemein fassen wir eine Beziehung zwischen zwei Punkten als Attribut einer Kante auf. Mit der Einheitsmatrix \mathbf{E} der Dimension drei definieren wir die Kanten-Knoten-Matrix \mathbf{C} für eine Kante

$$\mathbf{E}_{(3,3)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{C}_{(3,6)} = \left[\mathbf{E} \quad -\mathbf{E} \right] \quad [-]. \quad (1.4)$$

Der Vektor $\underline{\mathbf{u}}_{12}$ für die Koordinatendifferenzen läßt sich damit sehr einfach ausdrücken

$$\underline{\mathbf{u}}_{12(3,1)} = \begin{bmatrix} u_{12} \\ v_{12} \\ w_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ y_1 - y_2 \\ z_1 - z_2 \end{bmatrix} = \mathbf{C}\underline{\mathbf{x}} \quad [m] \quad (1.5)$$

und die Ableitungen der Strecke l_1 nach den Koordinaten $\underline{\mathbf{x}}_1$ und $\underline{\mathbf{x}}_2$ ergibt [31]

$$\begin{aligned} \frac{\partial l_1}{\partial \underline{\mathbf{x}}} &= \frac{\partial l_1}{\partial \underline{\mathbf{u}}_{12}} \frac{\partial \underline{\mathbf{u}}_{12}}{\partial \underline{\mathbf{x}}} \\ &= \frac{1}{l_1} [u_{12}, v_{12}, w_{12}, -u_{12}, -v_{12}, -w_{12}] \\ &= l_1^{-1} \underline{\mathbf{u}}^T \mathbf{C} \quad [-]. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Setzt sich die skalare Größe aus mehreren Veränderlichen zusammen, so können die Ableitungen der skalaren Größe nach diesen Veränderlichen zu einem Vektor zusammengefaßt werden.

1.1.3 Das Dreieck

Das Dreieck ist gegeben durch drei Punkte im Raum. Die Reihenfolge der Punkte legt die Orientierung des Dreiecks fest, d.h. der Normalenvektor des Dreiecks zeigt zum Ursprung hin oder vom Ursprung weg.

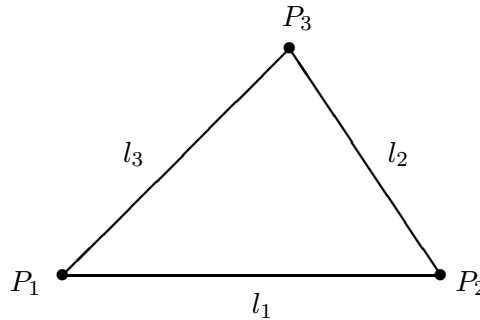


Abb. 1.1.3 Das Dreieck

Mit den Koordinaten der Punkten $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$ und $P_3(x_3, y_3, z_3)$ definieren wir den Vektor

$$\underline{\mathbf{x}}_{(1,9)}^T = \left[\underline{\mathbf{x}}_1^T \quad \underline{\mathbf{x}}_2^T \quad \underline{\mathbf{x}}_3^T \right] = [x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3] \quad [m], \quad (1.7)$$

die Kanten-Knoten-Matrix für das Dreieck

$$\mathbf{C}_{(9,9)} = \begin{bmatrix} \mathbf{E} & -\mathbf{E} & \mathbf{o} \\ \mathbf{o} & \mathbf{E} & -\mathbf{E} \\ -\mathbf{E} & \mathbf{o} & \mathbf{E} \end{bmatrix} \quad [-], \quad (1.8)$$

den Vektor $\underline{\mathbf{l}}$ für die drei Kantenlängen und die Diagonalmatrix \mathbf{L}

$$\underline{\mathbf{l}}_{(3,1)} = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{L}_{(3,3)} = \begin{bmatrix} l_1 & 0 & 0 \\ 0 & l_2 & 0 \\ 0 & 0 & l_3 \end{bmatrix} \quad [m], \quad (1.9)$$

sowie den Vektor \underline{u} für die Koordinatendifferenzen und die Matrix \mathbf{U}

$$\underline{u}_{(9,1)} = \begin{bmatrix} \underline{u}_{12} \\ \underline{u}_{23} \\ \underline{u}_{31} \end{bmatrix} = \mathbf{C}\underline{x}; \quad \mathbf{U}_{(9,3)} = \begin{bmatrix} \underline{u}_{12} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \underline{u}_{23} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \underline{u}_{31} \end{bmatrix} \quad [m]. \quad (1.10)$$

In dieser kompakten Schreibweise lassen sich die Ableitungen der drei Kantenlängen \underline{l} nach allen neun Knotenkoordinaten \underline{x} des Dreiecks sehr einfach angeben

$$\frac{\partial \underline{l}}{\partial \underline{x}} = \mathbf{L}^{-1} \mathbf{U}^T \mathbf{C} \quad [-]. \quad (1.11)$$

Die Ableitungen eines Vektors nach mehreren Veränderlichen können zu einer Matrix zusammengefaßt werden.

1.1.4 Der Tetraeder

Der Tetraeder ist gegeben durch vier Punkte $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$, $P_3(x_3, y_3, z_3)$ und $P_4(x_4, y_4, z_4)$.

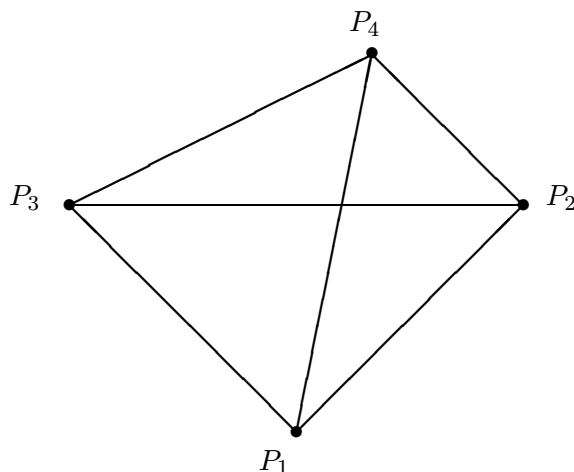


Abb. 1.1.4 Der Tetraeder

Das Volumen des Tetraeders berechnet sich nach [6]

$$\begin{aligned} 6V &= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \\ x_1 - x_3 & y_1 - y_3 & z_1 - z_3 \\ x_1 - x_4 & y_1 - y_4 & z_1 - z_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_{12} & v_{12} & w_{12} \\ u_{13} & v_{13} & w_{13} \\ u_{14} & v_{14} & w_{14} \end{vmatrix} \\ &= u_{12}(v_{13}w_{14} - v_{14}w_{13}) \\ &+ u_{13}(v_{14}w_{12} - v_{12}w_{14}) \\ &+ u_{14}(v_{12}w_{13} - v_{13}w_{12}) \quad [m^3]. \end{aligned} \quad (1.12)$$

V ist positiv, wenn das Vektortripel \underline{u}_{12} , \underline{u}_{13} und \underline{u}_{14} die gleiche Orientierung wie das Koordinatensystem hat. Ist $V = 0$, liegen die vier Punkte in einer Ebene (notwendige und hinreichende Bedingung).

Die Ableitungen nach den Koordinaten $\underline{\mathbf{x}}_{(1,12)}^T = [\underline{\mathbf{x}}_1^T \ \underline{\mathbf{x}}_2^T \ \underline{\mathbf{x}}_3^T \ \underline{\mathbf{x}}_4^T]$ lauten

$$6\underline{\mathbf{b}}_{(12,1)} = 6 \left(\frac{\partial V}{\partial \underline{\mathbf{x}}} \right)^T = \begin{bmatrix} 0 & +y_2 w_{34} & +y_3 w_{42} & +y_4 w_{23} \\ 0 & +z_2 u_{34} & +z_3 u_{42} & +z_4 u_{23} \\ 0 & +x_2 v_{34} & +x_3 v_{42} & +x_4 v_{23} \\ y_1 w_{43} & +0 & +y_3 w_{14} & +y_4 w_{31} \\ z_1 u_{43} & +0 & +z_3 u_{14} & +z_4 u_{31} \\ x_1 v_{43} & +0 & +x_3 v_{14} & +x_4 v_{31} \\ y_1 w_{24} & +y_2 w_{41} & +0 & +y_4 w_{12} \\ z_1 u_{24} & +z_2 u_{41} & +0 & +z_4 u_{12} \\ x_1 v_{24} & +x_2 v_{41} & +0 & +x_4 v_{12} \\ y_1 w_{32} & +y_2 w_{13} & +y_3 w_{21} & +0 \\ z_1 u_{32} & +z_2 u_{13} & +z_3 u_{21} & +0 \\ x_1 v_{32} & +x_2 v_{13} & +x_3 v_{21} & +0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_{x342} \\ n_{y342} \\ n_{z342} \\ n_{x431} \\ n_{y431} \\ n_{z431} \\ n_{x124} \\ n_{y124} \\ n_{z124} \\ n_{x213} \\ n_{y213} \\ n_{z213} \end{bmatrix} \quad [m^2]. \quad (1.13)$$

Die zweiten Ableitungen ergeben sich zu $6 \mathbf{H}_{(12,12)} = 6 \frac{\partial \underline{\mathbf{b}}}{\partial \underline{\mathbf{x}}} = 6 \frac{\partial^2 V}{\partial \underline{\mathbf{x}}^2} =$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & w_{34} & v_{43} & 0 & w_{42} & v_{24} & 0 & w_{23} & v_{32} \\ & 0 & 0 & w_{43} & 0 & u_{34} & w_{24} & 0 & u_{42} & w_{32} & 0 & u_{23} \\ & & 0 & v_{34} & u_{43} & 0 & v_{42} & u_{24} & 0 & v_{23} & u_{32} & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 & 0 & w_{14} & v_{41} & 0 & w_{31} & v_{13} \\ & & & & 0 & 0 & w_{41} & 0 & u_{14} & w_{13} & 0 & u_{31} \\ & & & & & 0 & v_{14} & u_{41} & 0 & v_{31} & u_{13} & 0 \\ & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & w_{12} & v_{21} \\ & & & & & & & 0 & 0 & w_{21} & 0 & u_{12} \\ & & & & & & & & 0 & v_{12} & u_{21} & 0 \\ & & & & & & & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad [m]. \quad (1.14)$$

sym.

Bildet das Dreieck mit dem Ursprung $P_0(0,0,0)$ einen Tetraeder, so vereinfacht sich die Berechnung des Volumens

$$6V_{\Delta} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1(y_2 z_3 - y_3 z_2) \\ +x_2(y_3 z_1 - y_1 z_3) \\ +x_3(y_1 z_2 - y_2 z_1) \end{vmatrix} \quad [m^3]. \quad (1.15)$$

Die Ableitungen nach den Koordinaten lauten

$$6\mathbf{b}_{(9,1)} = 6 \left(\frac{\partial V_{\Delta}}{\partial \mathbf{x}} \right)^T = \begin{bmatrix} y_2 z_3 - y_3 z_2 \\ z_2 x_3 - z_3 x_2 \\ x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ y_3 z_1 - y_1 z_3 \\ z_3 x_1 - z_1 x_3 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ y_1 z_2 - y_2 z_1 \\ z_1 x_2 - z_2 x_1 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{x}_2 \times \underline{x}_3 \\ \underline{x}_3 \times \underline{x}_1 \\ \underline{x}_1 \times \underline{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{n}_{023} \\ \underline{n}_{031} \\ \underline{n}_{012} \end{bmatrix} \quad [m^2]. \quad (1.16)$$

Die zweiten Ableitungen ergeben sich zu $6 \mathbf{H}_{(9,9)} = 6 \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \mathbf{x}} = 6 \frac{\partial^2 V_{\Delta}}{\partial \mathbf{x}^2} =$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & z_3 & -y_3 & 0 & -z_2 & y_2 \\ & 0 & 0 & -z_3 & 0 & x_3 & z_2 & 0 & -x_2 \\ & & 0 & y_3 & -x_3 & 0 & -y_2 & x_2 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 & 0 & z_1 & -y_1 \\ & & & & 0 & 0 & -z_1 & 0 & x_1 \\ & & & & & 0 & y_1 & -x_1 & 0 \\ & & & & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & 0 & 0 \\ \text{sym.} & & & & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad [m]. \quad (1.17)$$

Die Regeln der Matrizenrechnung werden im folgenden als bekannt vorausgesetzt.

1.1.5 Das Netz

Abschließend betrachten wir ein aus m Knoten bestehendes Netz und definieren den Vektor

$$\mathbf{x}_{N(1,3m)}^T = [\mathbf{x}_1^T \mathbf{x}_2^T \dots \mathbf{x}_m^T], \quad (1.18)$$

der die Koordinaten der Punkte P_1, P_2, \dots, P_m enthält. Der Index N gibt an, daß sich die Skalare, Vektoren und Matrizen auf das ganze zusammenhängende Netz beziehen. Die Kanten-Knoten-Matrix \mathbf{C}_N enthält z.B. die Verknüpfungsvorschrift oder Topologie des gesamten Netzes.

Flächen, Seifenhäute und Membrane in diskreter Form

Grundlage für die nachfolgenden Betrachtungen bildet die Geometrie, deren Entwicklung es ermöglicht, Formen und Eigenschaften von Körpern aus der menschlichen Umwelt zu beschreiben. Zu diesen Formen gehören Minimalflächen, Seifenblasen, Membrane und Pneus, die Gegenstand dieser Ausführungen sind.

Die typische Vorgehensweise des Geodäten läßt sich anhand seiner traditionellen Tätigkeit, die Bestimmung der Gestalt der Erde, insbesondere der Erdoberfläche, verdeutlichen. Neben der Berechnung des Rotationsellipsoides und der Frage nach den physikalischen Gesetzmäßigkeiten, denen die Erde unterworfen ist, wuchs insbesondere der Bedarf an möglichst genauen Karten für lokale Bereiche. Exaktere Angaben über die Topographie konnten erreicht werden, indem man die Erde in einzelne Streifen entlang den Meridianen unterteilte und diese durch dreiecksartige Netze verfeinerte.

Ziel der Vermessung ist es, mit Hilfe von z.B. Strecken, Winkeln und Höhenunterschieden die Koordinaten der Netzknoten zu bestimmen. Die Berechnung der Koordinaten ist diskret, d.h. über die Zwischenräume innerhalb der von den Meßelementen definierten Kanten können zunächst keine Aussagen getroffen werden. Handelt es sich bei den Knoten um Grenzpunkte eines Flurstücks, so stellt die berechnete Fläche des Flurstücks eine Information über das Kontinuum, in diesem Fall der Erdoberfläche, dar [62]. In gleicher Weise werden die hier beschriebenen Flächen durch n ebene Dreiecke approximiert. Der Betrag der Oberfläche ergibt sich durch Summation der einzelnen ebenen Dreiecksflächen

$$F_N = \sum_{i=1}^n F_{\Delta i} \quad [m^2]. \quad (2.1)$$

Wesentlich für das mathematische Modell ist die Beschreibung der Anfangs- und Endlage des Dreiecksnetzes, vor und nach der Verformung. Jeder Knoten des Netzes wird wieder auf genau einen Knoten, jede geradlinige Kante wird wiederum auf eine geradlinige Kante abgebildet. Die Anzahl der Knoten, Kanten und Dreiecke ändert sich aufgrund der Verformung des Netzes nicht. Die Topologie, die Nachbarschaftsbeziehung oder die Kanten-Knoten-Matrix des Netzes bleiben erhalten.

*Der Begriff der Abbildung steht im Mittelpunkt der Gaußschen Lehre von den krummen Flächen. » Sie haben ganz Recht «, schreibt Gauss am 11. Dezember 1825 an Hansen, » dass bei allen Kartenprojektionen die Ähnlichkeit der kleinsten Teile die **w e s e n t l i c h e** Bedingung ist, die man nur in ganz speziellen Fällen und Bedürfnissen hintansetzen darf. Es wäre wohl zweckmässig, den Darstellungen, die jener Bedingung Genüge leisten, einen eigenen Namen zu geben. Inzwischen, allgemein betrachtet, ist sie doch nur eine Unterabteilung des Generalbegriffs von Darstellung einer Fläche auf einer andern, die in der Tat **g a r n i c h t s w e i t e r** enthält, als dass jedem Punkt der einen nach irgend einem stetigen **G e s e t z** ein Punkt der andern korrespondieren soll. Es mag wohl etwas Anstrengung kosten, sich zu diesem allgemeinen Begriff zu erheben; dann aber fühlt man sich auch wirklich auf einem höheren Standpunkt, wo alles in vergrößerter Klarheit erscheint. ... Man kann leicht zeigen, dass, wie allgemein dieser Begriff sei, doch allemal jeder unendlich kleine Teil (mit Ausnahme der Stellen an singulären Punkten oder Linien) wahrhaft perspektivisch dargestellt wird, entweder mit völliger Ähnlichkeit, so wie perspektivische Darstellung auf paralleler Tafel, oder mit halber Ähnlichkeit, in der in einem Sinn eine Verkürzung statt hat « (C.F. Gauß, Werke X, Seite 91).*

Nachdem der Vorgang des Abbildens hinreichend geklärt ist, können wir eine weitere Einschränkung unserer Flächen unternehmen. Es handelt sich bei diesen Dreiecksnetzen nicht um eine beliebige Ansammlung von geometrischen Linien, sondern die Lage der Knoten setzt voraus, daß die Summe der

Kräfte, die an einem Knoten angreifen, sich zu Null ergibt, d.h. diese Flächen sind Gleichgewichtsfiguren.

Sofern die Gleichgewichtsfiguren der Membranen und Seifenhäute geschlossen sind, werden sie durch Innendruck stabilisiert, andernfalls sind sie in der Regel vorgespannt. Um die Analogie zur Ausgleichsrechnung aufzeigen zu können, bleiben zunächst diejenigen Kräfte unberücksichtigt, die durch äußere Lasten entstehen. Sie gibt es nämlich in der Ausgleichsrechnung nicht und werden in Kapitel 4.1.1 gesondert behandelt.

In diesem Kapitel definieren wir zuerst das Potential für das gesamte Netz, das aus n Dreiecken und m Knoten besteht. Anschließend beziehen sich die Formulierungen auf ein Dreieck, das stellvertretend für alle Dreiecke des Netzes ist. Die globale Betrachtungsweise des gesamten Netzes findet in den nächsten Kapiteln statt. Beweise, denen einige Schlußfolgerungen zugrunde liegen, befinden sich am Anhang B.

2.1 Verformung des Dreiecks

Die exakte geometrische Beschreibung des einzelnen Dreiecks, das durch Abbildungsvorschriften verformt wird, bildet die Grundlage für die weiteren Ausführungen. In dieser Arbeit wird das Dreieck im unverformten Zustand durch die drei Eckpunkte $P_{01}(x_{01}, y_{01}, z_{01})$, $P_{02}(x_{02}, y_{02}, z_{02})$ und $P_{03}(x_{03}, y_{03}, z_{03})$ beschrieben, während das Dreieck im verformten Zustand durch seine drei Eckpunkte $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$ und $P_3(x_3, y_3, z_3)$ gegeben ist. Die drei Punkte spannen eine Ebene im Raum auf, der wir einen Normalenvektor zuweisen können. Die Reihenfolge der Eckpunkte ist entscheidend für die Orientierung des Dreiecks und für die Richtung des Normalenvektors.

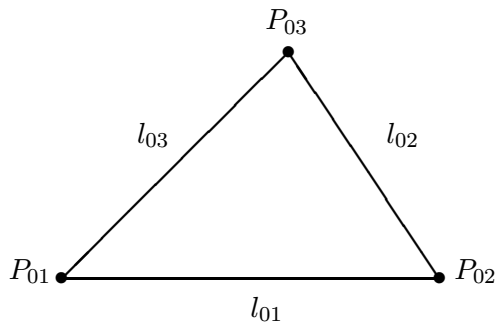


Abb. 2.1.1 Unverformter Zustand

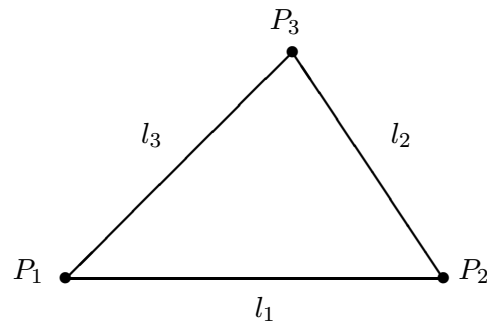


Abb. 2.1.2 Verformter Zustand

Da die Eckpunkte des unverformten Dreiecks den Eckpunkten des verformten Dreiecks zugeordnet werden, kann die Abbildung nur durch genau eine ebene affine Abbildung beschrieben werden. Die ebene affine Abbildung ist parallelentreu, d.h. die Bilder paralleler Geraden sind wieder parallel und sie ist teilverhältnistreu, d.h. Streckenverhältnisse bleiben gleich [55], [74].

Im unverformten Zustand wird das Dreieck im (u, v) -Koordinatensystem beschrieben und die Strecken l_{01} , l_{02} und l_{03} zwischen den Punkten werden als ungedehnte Längen bezeichnet. Den verformten Zustand formulieren wir im (u', v') -Koordinatensystem, so daß die mathematische Beschreibung für eine beliebige affine Abbildung im zweidimensionalen Raum lautet

$$\underline{\mathbf{u}}' = \begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix} = \mathbf{A}\underline{\mathbf{u}} + \underline{\mathbf{b}} \quad [m]. \quad (2.2)$$

Zur Beschreibung der Verformung des Dreiecks genügen drei unabhängige Parameter. Diese Parameter können die drei Kantenverlängerungen $\Delta l_1 = l_1 - l_{01}$, $\Delta l_2 = l_2 - l_{02}$ und $\Delta l_3 = l_3 - l_{03}$ sein, oder die drei Greenschen Verzerrungen ϵ_{uu} , ϵ_{vv} und ϵ_{uv} .

Mit dem Vektor für die Koordinatendifferenzen

$$\underline{u}'_{12} = \underline{u}'_1 - \underline{u}'_2 = \mathbf{A}\underline{u}_1 + \underline{b} - (\mathbf{A}\underline{u}_2 + \underline{b}) = \mathbf{A}\underline{u}_{12} \quad [m] \quad (2.3)$$

ergibt sich das Quadrat des Längenelements im verformten Zustand

$$\begin{aligned} l_1^2 &= (u'_{12})^2 + (v'_{12})^2 \\ &= (au_{12} + bv_{12})^2 + (cu_{12} + dv_{12})^2 \\ &= (a^2 + c^2)u_{12}^2 + (b^2 + d^2)v_{12}^2 + 2(ab + cd)u_{12}v_{12} \quad [m^2]. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Für die Differenz der Quadrate der Längenelemente im verformten und unverformten Zustand erhalten wir, indem wir die drei Verzerrungen definieren

$$\begin{aligned} l_1^2 - l_{01}^2 &= (u'_{12})^2 + (v'_{12})^2 - (u_{12}^2 + v_{12}^2) \\ &= \underbrace{(a^2 + c^2 - 1)}_{2\epsilon_{uu}} u_{12}^2 + \underbrace{(b^2 + d^2 - 1)}_{2\epsilon_{vv}} v_{12}^2 + 2\underbrace{(ab + cd)}_{2\epsilon_{uv}} u_{12}v_{12} \\ &= 2(u_{12}^2\epsilon_{uu} + v_{12}^2\epsilon_{vv} + 2u_{12}v_{12}\epsilon_{uv}) \quad [m^2], \end{aligned} \quad (2.5)$$

oder in Matrixschreibweise

$$l_1^2 - l_{01}^2 = \underline{u}_{12}^T \begin{bmatrix} 2\epsilon_{uu} & 2\epsilon_{uv} \\ 2\epsilon_{uv} & 2\epsilon_{vv} \end{bmatrix} \underline{u}_{12} = \underline{u}_{12}^T [\mathbf{A}^T \mathbf{A} - \mathbf{E}] \underline{u}_{12} \quad [m^2]. \quad (2.6)$$

Die affine Abbildung besitzt keinerlei Einschränkungen bezüglich der Größe der Verzerrungen. Handelt es sich jedoch bei den Koordinatendifferenzen und den Quadraten der Längenelemente um differentiell kleine Größen, finden wir in der Kontinuumsmechanik folgende tensorielle Darstellung

$$dl_1^2 - dl_{01}^2 = 2\epsilon_{\alpha\beta} du_\alpha du_\beta \quad [m^2] \quad (2.7)$$

für $\epsilon_{\alpha\beta} = const$ über das Dreieck. Dort ist $\epsilon_{\alpha\beta} = (c_{\alpha\beta} - g_{\alpha\beta})/2$ der Greensche Verzerrungstensor der finiten Verzerrungen. Er läßt sich aus dem Greenschen Deformationstensor $c_{\alpha\beta}$ und dem Metriktensor $g_{\alpha\beta}$ berechnen [13], [21], [64], [65]. In der Darstellung (2.6) entspräche $c_{\alpha\beta} \hat{=} \mathbf{A}^T \mathbf{A}$, $g_{\alpha\beta} \hat{=} \mathbf{E}$ sowie \mathbf{A} dem Deformationsgradienten. Der Übergang auf alle Dreiecksseiten läßt sich durch das nachfolgende Bild verdeutlichen

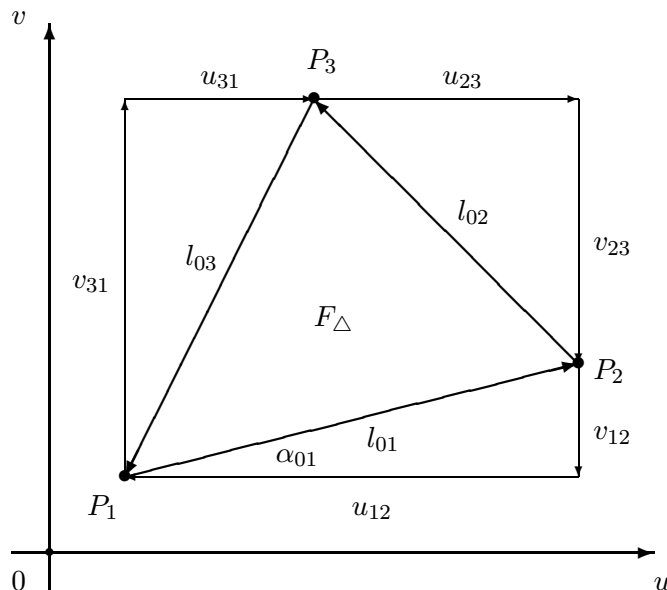


Abb. 2.1.3 Das Dreieck im u, v -System

Zwischen den drei Dreiecksseiten im unverformten und verformten Zustand und den Verzerrungen gilt nach (2.5)

$$\frac{1}{2}(\mathbf{L}\underline{\mathbf{L}} - \mathbf{L}_0\underline{\mathbf{L}}_0) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} l_1^2 - l_{01}^2 \\ l_2^2 - l_{02}^2 \\ l_3^2 - l_{03}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{12}^2 & v_{12}^2 & \sqrt{2}u_{12}v_{12} \\ u_{23}^2 & v_{23}^2 & \sqrt{2}u_{23}v_{23} \\ u_{31}^2 & v_{31}^2 & \sqrt{2}u_{31}v_{31} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{uu} \\ \epsilon_{vv} \\ \sqrt{2}\epsilon_{uv} \end{bmatrix} = \mathbf{T}\underline{\boldsymbol{\epsilon}} \quad [m^2]. \quad (2.8)$$

Die Matrix \mathbf{T} können wir noch aufspalten und erhalten mit den Richtungswinkeln α_{01} , α_{02} und α_{03} , den die Dreiecksseiten mit der u -Achse einschließen

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} l_{01}^2 & 0 & 0 \\ 0 & l_{02}^2 & 0 \\ 0 & 0 & l_{03}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha_{01} & \sin^2 \alpha_{01} & \sqrt{2} \cos \alpha_{01} \sin \alpha_{01} \\ \cos^2 \alpha_{02} & \sin^2 \alpha_{02} & \sqrt{2} \cos \alpha_{02} \sin \alpha_{02} \\ \cos^2 \alpha_{03} & \sin^2 \alpha_{03} & \sqrt{2} \cos \alpha_{03} \sin \alpha_{03} \end{bmatrix} = \mathbf{L}_0^2 \mathbf{D} \quad [m^2], \quad (2.9)$$

wobei die Matrix \mathbf{D} die Eigenschaft besitzt

$$\begin{bmatrix} \cos^2 \alpha_{01} & \sin^2 \alpha_{01} & \sqrt{2} \cos \alpha_{01} \sin \alpha_{01} \\ \cos^2 \alpha_{02} & \sin^2 \alpha_{02} & \sqrt{2} \cos \alpha_{02} \sin \alpha_{02} \\ \cos^2 \alpha_{03} & \sin^2 \alpha_{03} & \sqrt{2} \cos \alpha_{03} \sin \alpha_{03} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad [-]. \quad (2.10)$$

Weiterhin sind die Hauptstreckungen λ_1 und λ_2 , die sich aus der Hauptachsentransformation von $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ ergeben, eindeutig bestimmbar

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 \end{bmatrix} = \mathbf{R}^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{R} \quad [-]. \quad (2.11)$$

Dazu benötigen wir den Drehwinkel

$$\phi = \frac{1}{2} \arctan \frac{2(ab + cd)}{(a^2 + c^2) - (b^2 + d^2)} = \frac{1}{2} \arctan \frac{2\epsilon_{uv}}{\epsilon_{uu} - \epsilon_{vv}} \quad [-] \quad (2.12)$$

und erhalten die orthogonale Matrix

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \quad [-]. \quad (2.13)$$

Zwischen dem Flächeninhalt des Dreiecks im verformten und unverformten Zustand gilt dann

$$F_{\Delta} = F_{\Delta 0} \lambda_1 \lambda_2 \quad [m^2]. \quad (2.14)$$

Bei der affinen Abbildung kann die Verformung des Dreiecks beliebig groß sein. Entartet ein Dreieck zu einem Strich, ist die Rückabbildung nicht mehr möglich, da die Transformationsmatrix \mathbf{A} singulär ist. Ebenso sind Spiegelungen $\text{Det}(\mathbf{A}) < 0$ unzulässig.

2.2 Minimalflächen und Seifenhäute

Minimalflächen sind die kleinsten Flächen mit vorgegebener geschlossener Randkurve. Die Idee für nachfolgende Modellierung stammt aus [28].

2.2.1 Minimalflächen

Diskretisieren wir die zu minimierende Minimalfläche durch n Dreiecke, so ergibt sich die Gesamtfläche (Gesamtpotential) durch die Summation der Teilflächen (Teilpotentiale) der einzelnen Dreiecke zu

$$\Pi_N = \sum_{i=1}^n \Pi_{\Delta i} \rightarrow \min. \quad [m^2]. \quad (2.15)$$

Das zu lösende Gleichungssystem erhalten wir, indem wir das Potential nach den unbekanntenen Koordinaten des gesamten Netzes ableiten, anschließend transponieren und die Gleichungen zu Null setzen

$$\frac{\partial \Pi_N}{\partial \underline{\mathbf{x}}_N} = \mathbf{g}(\underline{\mathbf{x}}) = \underline{\mathbf{0}} \quad [m]. \quad (2.16)$$

Als bewährte Methode zur Lösung der unbekanntenen Koordinaten des Netzes wenden wir nach (A.8) und (A.9) das Newton-Verfahren an

$$\mathbf{g}(\underline{\mathbf{x}}) = \mathbf{g}(\underline{\mathbf{x}}_0) + \frac{\partial \mathbf{g}(\underline{\mathbf{x}})}{\partial \underline{\mathbf{x}}} \underline{\Delta \mathbf{x}} = \underline{\mathbf{0}}. \quad (2.17)$$

Im folgenden betrachten wir nur ein einzelnes Dreieck, das stellvertretend für alle anderen Dreiecke des Netzes ist. Indem wir versuchen, den Flächeninhalt dieses Dreiecks so klein wie möglich werden zu lassen, definieren wir mit f_{Δ} als Wurzel der Dreiecksfläche F_{Δ} in Analogie zur Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen (vgl. Anhang A.2)

$$\Pi_{\Delta} = \underline{\mathbf{v}}^T \mathbf{P} \underline{\mathbf{v}} = f_{\Delta}^T f_{\Delta} = F_{\Delta} \quad [m^2]. \quad (2.18)$$

Für die Berechnung der Dreiecksfläche verwenden wir die Heronsche Formel. Es gilt

$$F_{\Delta} = \sqrt{s(s-l_1)(s-l_2)(s-l_3)} \quad [m^2] \quad ; \quad \text{mit} \quad s = (l_1 + l_2 + l_3)/2 \quad [m]. \quad (2.19)$$

Setzen wir die Variable s ein und fassen den ausmultiplizierten Term zusammen, so erhalten wir

$$16F_{\Delta}^2 = -l_1^4 - l_2^4 - l_3^4 + 2l_1^2 l_2^2 + 2l_2^2 l_3^2 + 2l_3^2 l_1^2 \quad [m^4]. \quad (2.20)$$

In Matrixschreibweise mit $\underline{\mathbf{e}}_{(1,3)}^T = [1, 1, 1]$ und $\mathbf{M}_{(3,3)} = \underline{\mathbf{e}} \underline{\mathbf{e}}^T - 2\mathbf{E}_{(3,3)}$ ergibt sich die quadratische Form

$$16F_{\Delta}^2 = \begin{bmatrix} l_1^2 & l_2^2 & l_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ & -1 & 1 \\ \text{sym.} & & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1^2 \\ l_2^2 \\ l_3^2 \end{bmatrix} = \underline{\mathbf{l}}^T \mathbf{L} \mathbf{M} \mathbf{L} \underline{\mathbf{l}} \quad [m^4]. \quad (2.21)$$

Um die Lösung zu finden, müssen wir das Teilpotential Π_{Δ} nach den unbekanntenen Koordinaten der Dreieckspunkte ableiten. Die Kettenregel liefert

$$\frac{\partial \Pi_{\Delta}}{\partial \underline{\mathbf{x}}} = \frac{\partial F_{\Delta}}{\partial \underline{\mathbf{x}}} = \frac{\partial F_{\Delta}}{\partial \underline{\mathbf{l}}} \frac{\partial \underline{\mathbf{l}}}{\partial \underline{\mathbf{x}}}. \quad (2.22)$$

Die einzelnen partiellen Ableitungen ergeben sich mit den Bezeichnungen aus (1.11)

$$\frac{\partial F_{\Delta}}{\partial \underline{l}} = \frac{1}{8F_{\Delta}} \underline{l}^T \mathbf{LML} \quad ; \quad \frac{\partial \underline{l}}{\partial \underline{x}} = \mathbf{L}^{-1} \mathbf{U}^T \mathbf{C}. \quad (2.23)$$

Zunächst ohne Berücksichtigung irgendeiner physikalischen Bedeutung wenden wir einen Rechenrick an und definieren formal den Kraftdichtevektor - generell alles, das nicht zur Kanten-Knoten-Matrix \mathbf{C} und der Matrix \mathbf{U} für die Koordinatendifferenzen gehört- als

$$\underline{\mathbf{q}}_{(3,1)} := \frac{1}{8F_{\Delta}} \mathbf{MLL} \quad [-] \quad (2.24)$$

und fassen die oben genannten Terme nach dem Transponieren zusammen. Der Anteil des Dreiecks am gesuchten Gleichungssystem lautet

$$\mathbf{g}(\underline{\mathbf{x}})_{(9,1)} = \mathbf{C}^T \mathbf{U} \frac{1}{8F_{\Delta}} \mathbf{MLL} = \mathbf{C}^T \mathbf{U} \underline{\mathbf{q}} = \mathbf{C}^T \mathbf{Q} \underline{\mathbf{u}} = \mathbf{C}^T \mathbf{Q} \mathbf{C} \underline{\mathbf{x}} \quad [m]. \quad (2.25)$$

Die Anteile des Dreiecks an der linearisierten Normalgleichungsmatrix ergibt sich durch Differentiation von $\underline{\mathbf{l}}$, $\underline{\mathbf{u}}$ und F_{Δ} nach den Veränderlichen $\underline{\mathbf{x}}$ unter Anwendung der Produktregel

$$\frac{\partial \mathbf{g}(\underline{\mathbf{x}})}{\partial \underline{\mathbf{x}}} = \underbrace{\mathbf{C}^T \mathbf{Q} \frac{\partial \underline{\mathbf{u}}}{\partial \underline{\mathbf{x}}}}_{\mathbf{N}_1} + \underbrace{\mathbf{C}^T \mathbf{U} \frac{1}{8F_{\Delta}} \mathbf{M} \frac{\partial \mathbf{L} \underline{\mathbf{l}}}{\partial \underline{\mathbf{x}}}}_{\mathbf{N}_2} + \underbrace{\mathbf{C}^T \mathbf{U} \frac{1}{8} \mathbf{MLL} \frac{\partial F_{\Delta}^{-1}}{\partial \underline{\mathbf{x}}}}_{\mathbf{N}_3} \quad (2.26)$$

mit

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_1 &= \mathbf{C}^T \mathbf{Q} \mathbf{C} \\ \mathbf{N}_2 &= \mathbf{C}^T \mathbf{U} \frac{1}{4F_{\Delta}} \mathbf{M} \mathbf{U}^T \mathbf{C} \\ \mathbf{N}_3 &= -\mathbf{C}^T \mathbf{U} \underline{\mathbf{q}} \frac{1}{F_{\Delta}} \underline{\mathbf{q}}^T \mathbf{U}^T \mathbf{C}. \end{aligned}$$

Starten wir mit geeigneten Näherungswerten $\underline{\mathbf{x}}_0$, so lautet das zu lösende Gleichungssystem für das gesamte Netze

$$(\mathbf{C}^T \mathbf{Q} \mathbf{C})_N \underline{\Delta \mathbf{x}}_N = -(\mathbf{C}^T \mathbf{Q} \mathbf{C})_N \underline{\mathbf{x}}_0 \quad [m]. \quad (2.27)$$

Zahlreiche numerische Beispiele zeigten, daß die Anteile \mathbf{N}_2 und \mathbf{N}_3 der exakten Normalgleichungsmatrix sich ungünstig auf die Konvergenz des Newton-Verfahrens auswirken. Sie bleiben deshalb unberücksichtigt. Die Kraftdichten sind keine Konstanten und müssen nach (2.24) in jedem Iterationsschritt neu berechnet werden.

2.2.2 Seifenhäute

Das Gleichgewicht von Seifenhäuten ist durch das Minimum der potentiellen Energie charakterisiert, wobei das innere Potential proportional der Seifenhautfläche ist. Mit der Oberflächenspannung σ [Nm^{-1}] ergibt sich das Potential

$$\Pi_N = \sum_{i=1}^n \sigma F_{\Delta i} \rightarrow \min. \quad [Nm]. \quad (2.28)$$

Falls kein äußeres Potential infolge Schwerkraft und Druck vorliegt, lautet der Anteil des Dreiecks am Gleichungssystem der Gleichgewichtsfigur für das gesamte Netz

$$\mathbf{h}(\underline{\mathbf{x}})_{(9,1)} = \mathbf{C}^T \mathbf{U} \frac{\sigma}{8F_{\Delta}} \mathbf{M} \mathbf{L} \mathbf{l} = \mathbf{C}^T \mathbf{U} \underline{\mathbf{q}} = \mathbf{C}^T \mathbf{Q} \mathbf{C} \underline{\mathbf{x}} \quad [N]. \quad (2.29)$$

Die neun Gleichungen können wir jetzt als Komponenten von drei Kräften ansehen, die an den Punkten des Dreiecks angreifen. Die Richtung der Kraft, die an einem Punkt wirkt, ist senkrecht zur gegenüberliegenden Seite. Der Betrag der Kraft ist gleich der Spannung mal einhalb der Länge der gegenüberliegenden Seite (vgl. Beweis im Anhang B.1).

2.3 Geschlossene Minimalflächen und Seifenblasen

Die Seifenblase ist dadurch charakterisiert, daß die Haut, die eine unter Überdruck stehende Kammer umschließt, minimal ist. Zur mathematischen Beschreibung der Seifenblase gehen wir, wie bei der Minimalfläche, zunächst von rein geometrischen Überlegungen aus. Die Kammer wird dadurch modelliert, indem wir ein konstantes Volumen innerhalb der Oberfläche vorgeben.

2.3.1 Geschlossene Minimalflächen bei vorgegebenem Kammervolumen

Die einzelnen Dreiecke einer Kammeroberfläche bilden jeweils mit dem Ursprung einen Tetraeder, so daß die einzelnen Volumina V_{Δ} nach (1.15) aufsummiert das Volumen der Kammer im verformten Zustand ergeben. Es gilt mit dem Vektor $\underline{\mathbf{x}}_N^T$ für die Koordinaten des ganzen Netzes

$$V(\underline{\mathbf{x}}_N) = \sum_{i=1}^m V_{\Delta i}(\underline{\mathbf{x}}) \quad [m^3]. \quad (2.30)$$

Aus der Forderung heraus, daß dieses Volumen einem konstanten vorgegebenem Volumen V_N entsprechen soll, lautet das erweiterte Potential einer Kammer in Analogie zur Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen mit Bedingungen zwischen den Unbekannten (vgl. Anhang A.4)

$$\Pi_N = \sum_{i=1}^n F_{\Delta i} - k(V(\underline{\mathbf{x}}_N) - V_N) \rightarrow \text{stat} \quad [m^2]. \quad (2.31)$$

Die Variable k wird als Lagrangescher Multiplikator oder in der Ausgleichungsrechnung als Korrelate bezeichnet. Zwischen den unbekanntem Koordinaten gilt für eine Kammer genau eine Bedingungsgleichung. Nach den Unbekannten abgeleitet und transponiert ergibt sich folgendes Gleichungssystem

$$\frac{\partial \Pi_N}{\partial \underline{\mathbf{x}}_N} = \left(\frac{\partial F}{\partial \underline{\mathbf{x}}_N} \right)^T - \left(\frac{\partial V}{\partial \underline{\mathbf{x}}_N} \right)^T k = \underline{\mathbf{0}} \quad [m] \quad (2.32)$$

$$\frac{\partial \Pi_N}{\partial k} = -(V(\underline{\mathbf{x}}_N) - V_N) = 0 \quad [m^3]. \quad (2.33)$$

Mit den Bezeichnungen aus (2.25) erhalten wir für ein Dreieck

$$\mathbf{g}_1(\underline{\mathbf{x}}, k) = \mathbf{C}^T \mathbf{U} \frac{1}{8F_{\Delta}} \mathbf{M} \mathbf{L} \mathbf{l} - \underline{\mathbf{b}} k \quad [m] \quad (2.34)$$

$$\mathbf{g}_2(\underline{\mathbf{x}}, k) = -(V(\underline{\mathbf{x}}_N) - V_N) \quad [m^3] \quad (2.35)$$

und die Differentiation liefert unter Anwendung der Produktregel mit $\mathbf{H}_{(9,9)} = (\partial \underline{\mathbf{b}}k)/(\partial \underline{\mathbf{x}})$ diese Anteile an der Normalgleichungsmatrix

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{g}_1(\underline{\mathbf{x}}, k)}{\partial \underline{\mathbf{x}}} &= \mathbf{C}^T \mathbf{Q} \mathbf{C} - \mathbf{H} \quad ; \quad \frac{\partial \mathbf{g}_1(\underline{\mathbf{x}}, k)}{\partial k} = -\underline{\mathbf{b}} \\ \frac{\partial \mathbf{g}_2(\underline{\mathbf{x}}, k)}{\partial \underline{\mathbf{x}}} &= -\underline{\mathbf{b}}^T \quad ; \quad \frac{\partial \mathbf{g}_2(\underline{\mathbf{x}}, k)}{\partial k} = 0 \end{aligned} \quad (2.36)$$

Starten wir mit geeigneten Näherungswerten $\underline{\mathbf{x}}_0$ und k_0 , so lautet das zu lösende Gleichungssystem für das gesamte Netz

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{C}^T \mathbf{Q} \mathbf{C} - \mathbf{H})_N & -\underline{\mathbf{b}}_N \\ \text{sym.} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\Delta \mathbf{x}}_N \\ \Delta k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(\mathbf{C}^T \mathbf{Q} \mathbf{C})_N \underline{\mathbf{x}}_0 + \underline{\mathbf{b}}_N k_0 \\ V_0(\underline{\mathbf{x}}_N) - V_N \end{bmatrix}. \quad (2.37)$$

Wie bei der Minimalfläche werden hier nur die Anteile der Normalgleichungsmatrix benützt, die sich positiv auf die Konvergenz dieses nichtlinearen Problems auswirken. Die Bedeutung der Korrelate, die aus der Dimensionsbetrachtung heraus die Einheit $[m^{-1}]$ besitzt, kann anhand dieser Darstellung nicht erkannt werden. In Kapitel 4.7 wird gezeigt, daß die Korrelate der Krümmung entspricht.

2.3.2 Seifenblasen

Analog zur Betrachtungsweise bei der Seifenhaut führen wir die Oberflächenspannung $\sigma [Nm^{-1}]$ als konstanten Gewichtungsfaktor ein und erhalten für das Potential des gesamten Netzes

$$\Pi_N = \sum_{i=1}^n \sigma F_{\Delta i} - k(V(\underline{\mathbf{x}}_N) - V_N) \rightarrow \text{stat} \quad [Nm]. \quad (2.38)$$

Die Dimensionsbetrachtung zeigt, daß die Korrelate nun die Einheit $[Nm^{-2}]$ besitzt. Jetzt wirkt die Korrelate wie der Innendruck. Die weiteren Gleichungen ergeben sich entsprechend.

2.4 Membrane mit vorgegebener Randkurve

Ein Unterschied zwischen Membrane und Minimalflächen liegt darin, daß wir bei der Membrane die Form des Dreiecks im unverformten Zustand kennen, d.h. die ungedehnten Längen l_{01} , l_{02} und l_{03} sind gegeben.

2.4.1 St.-Venant-Kirchhoff-Material

Bei diesem Material besteht Linearität zwischen dem 2. Piola-Kirchhoffschen Spannungsvektor $\underline{\boldsymbol{\sigma}}_{(3,1)}$ und dem Greenschen Verzerrungsvektor $\underline{\boldsymbol{\epsilon}}_{(3,1)}$ (verallgemeinertes Hookesches Gesetz), und wir erhalten mit dem zweidimensionalen Spannungsverhalten der Membran folgende mathematischen Beziehungen für orthotropes Material [1]

$$\underline{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{uu} \\ \sigma_{vv} \\ \sqrt{2}\sigma_{uv} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{1111} & E_{1122} & 0 \\ & E_{2222} & 0 \\ \text{sym.} & & 2E_{1212} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{uu} \\ \epsilon_{vv} \\ \sqrt{2}\epsilon_{uv} \end{bmatrix} = \mathbf{M} \underline{\boldsymbol{\epsilon}} \quad [Nm^{-1}]. \quad (2.39)$$

Dabei sind E_{1111} und E_{2222} die Dehnsteifigkeiten in u- bzw. in v-Richtung, E_{1122} die Steifigkeit, die aus der Querdehnung resultiert und E_{1212} die Schubsteifigkeit. σ_{uu} und σ_{vv} werden als Normalspannungen, σ_{uv} als Schubspannung bezeichnet. Die Membrandicke ist in \mathbf{M} bereits berücksichtigt.

Um den Zusammenhang zwischen den Spannungen und Dehnungen beschreiben zu können, benötigen wir bis zu 4 Parameter für die Materialeigenschaften der Membrane und den Winkel α_{01} , der die Lage des Dreiecks gegenüber dem lokalen Koordinatensystem beschreibt (vgl. Abb. 2.1.3). Die exakte geometrische Abbildung des Dreiecks führt dazu, daß zwischen der Schubspannung und der Schiebung gilt $\sigma_{uv} = 2E_{1212}\epsilon_{uv}$. Zu beachten ist, daß (2.39) eigentlich nur für kleine Verzerrungen gilt, was eine wesentliche Einschränkung des Gültigkeitsbereichs der entwickelten Membrangleichungen bedeutet.

2.4.2 Nichtlineares Materialverhalten

Bei der nichtlinearen Ausgleichsrechnung nach vermittelnden Beobachtungen (vgl. Anhang A.2) werden die Beobachtungen, die es zu verbessern gilt, als nichtlineare Funktionen der Unbekannten formuliert. Die Gewichtsmatrix bleibt üblicherweise während des iterativen Berechnungsprozeß konstant, selbst wenn die ermittelten Verbesserungen gegenüber den Beobachtungen groß sind. Die Problematik der nichtlinearen Ausgleichsrechnung liegt in der Bereitstellung von geeigneten Näherungs- oder Rohwerten, damit der Berechnungsalgorithmus zur gesuchten Lösung konvergiert.

Entsprechend dieser Vorgehensweise wird die Matrix für die Materialeigenschaft (2.39), die der Gewichtsmatrix aus der nichtlinearen Ausgleichsrechnung gleichzusetzen ist (vgl. Kapitel 5.3), in dieser Arbeit als konstant betrachtet. Wie die Verwaltung der geometrischen und physikalischen Eigenschaften der Dreiecke, die das Membranmaterial repräsentieren, geschieht, wird in Kapitel 3.2 gezeigt. Dort ist ersichtlich, daß wir jedem einzelnen Dreieck unterschiedliche Materialkennwerte zuordnen können. Nach Bestimmung der Gleichgewichtsfigur mit den zuerst gewählten Materialkennwerten weisen wir den Dreiecken entsprechend ihrer Verzerrung andere Materialkennwerte zu. Anschließend führen wir eine weitere nichtlineare Berechnung mit diesen neuen konstanten Materialkennwerten durch und wiederholen gegebenenfalls dieses Vorgehen. Die schrittweise Abänderung der Materialkennwerte in den Dreiecken ermöglicht uns die Modellierung eines nichtlinearen Materialverhaltens der Membrankonstruktionen.

Weitere Untersuchungen zum nichtlinearen Materialverhalten von Membranen sind nicht Gegenstand dieser Arbeit. Unabhängig von der Größe der Verformung findet die Abbildung des Netzes ohne eine weitere Abänderung der Gewichts- bzw. Materialmatrix während des iterativen Berechnungsablaufs statt.

2.4.3 Bestimmung der Gleichgewichtsfigur

Diskretisieren wir die Membrane durch n Dreiecke, ergibt sich das Potential wie folgt

$$\Pi_N = \sum_{i=1}^n \Pi_{\Delta_i} \rightarrow \text{stat} \quad [Nm]. \quad (2.40)$$

Dabei ist berücksichtigt, daß keine Flächenlast und damit kein äußeres Potential vorhanden sein soll. Die Formänderungsenergie für ein dreieckiges Membranelement lautet [9]

$$\Pi_{\Delta} = \frac{1}{2} \int_F \underline{\boldsymbol{\sigma}}^T \underline{\boldsymbol{\epsilon}} dF \quad [Nm] \quad (2.41)$$

und es ergibt sich das Potential in Abhängigkeit der Koordinaten des Netzes

$$\Pi_N = \sum_{i=1}^n \Pi_{\Delta_i} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2} \underline{\boldsymbol{\epsilon}}^T F_{\Delta} \mathbf{M} \underline{\boldsymbol{\epsilon}} \right)_i \rightarrow \text{stat} \quad [Nm]. \quad (2.42)$$

Nach den Unbekannten abgeleitet und transponiert erhalten wir die gesuchte Gleichgewichtsfigur

$$\frac{\partial \Pi_N}{\partial \underline{\boldsymbol{x}}_N} = \underline{\boldsymbol{g}}(\underline{\boldsymbol{x}}) = \underline{\boldsymbol{o}} \quad [N]. \quad (2.43)$$

Im folgenden Betrachten wir nur die Anteile, die ein einzelnes Dreieck zum Aufbau der Normalgleichungen beiträgt

$$\frac{\partial \Pi_{\Delta}}{\partial \underline{\mathbf{x}}} = \left(\frac{\partial \underline{\boldsymbol{\epsilon}}}{\partial \underline{\mathbf{x}}} \right)^T F_{\Delta} \mathbf{M} \underline{\boldsymbol{\epsilon}} \quad [N]. \quad (2.44)$$

Da sich die Verzerrungen nach (2.8) aus den ungedehnten und gedehnten Längen berechnen lassen, ergeben sich die Ableitungen

$$\underline{\boldsymbol{\epsilon}} = \frac{1}{2} \mathbf{T}^{-1} (\mathbf{L} \underline{\mathbf{l}} - \mathbf{L}_o \mathbf{l}_o) \quad [-] \quad ; \quad \frac{\partial \underline{\boldsymbol{\epsilon}}}{\partial \underline{\mathbf{x}}} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{U}^T \mathbf{C} \quad [m^{-1}] \quad (2.45)$$

und wir können erneut den Kraftdichtevektor definieren als

$$\underline{\mathbf{q}}_{(3,1)} := \mathbf{T}^{-T} F_{\Delta} \underbrace{\mathbf{M} \underline{\boldsymbol{\epsilon}}}_{\underline{\boldsymbol{\sigma}}} \quad [Nm^{-1}]. \quad (2.46)$$

Ein Dreieck liefert folgende Anteile zur Berechnung der Gleichgewichtsfigur

$$\mathbf{g}_1(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{q}}) = \mathbf{C}^T \mathbf{U} \underline{\mathbf{q}} = \mathbf{C}^T \mathbf{Q} \mathbf{C} \underline{\mathbf{x}} \quad (2.47)$$

$$\mathbf{g}_2(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{q}}) = \underline{\mathbf{q}} - \mathbf{T}^{-T} F_{\Delta} \mathbf{M} \underline{\boldsymbol{\epsilon}}. \quad (2.48)$$

Zur Berechnung des Formfindungsmodells geben wir die Kraftdichten $\underline{\mathbf{q}}$ entsprechend den Wunschspannungen $\underline{\boldsymbol{\sigma}}$, mit den Beziehungen aus (2.46), als konstante Werte vor. Die Gleichungen \mathbf{g}_1 werden durch diese Maßnahme linear, und wir erhalten die unbekannt Koordinaten der Dreieckspunkte in einem Rechenschritt. Die Gleichungen \mathbf{g}_2 repräsentieren den Zusammenhang zwischen den Kraftdichten und dem Hookeschen Gesetz und bleiben bei der Formfindung unberücksichtigt.

Bei der statischen Berechnung sind die Kraftdichten $\underline{\mathbf{q}}$ ebenfalls unbekannt, und alle Gleichungen \mathbf{g}_1 und \mathbf{g}_2 müssen nun im Konvergenzpunkt gelten. Wegen der Nichtlinearität von \mathbf{g}_2 wählen wir als bewährte Methode zur Lösung der unbekannt Dreieckskoordinaten und Kraftdichten das schon bekannte und bewährte Newton-Verfahren. Die Normalgleichungsmatrix ergibt sich durch Differentiation von (2.47) und (2.48) unter Anwendung der Produktregel

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{g}_1(\underline{\mathbf{x}})}{\partial \underline{\mathbf{x}}} &= \mathbf{C}^T \mathbf{Q} \mathbf{C} \quad ; & \frac{\partial \mathbf{g}_1(\underline{\mathbf{x}})}{\partial \underline{\mathbf{q}}} &= \mathbf{C}^T \mathbf{U} \\ \frac{\partial \mathbf{g}_2(\underline{\mathbf{x}})}{\partial \underline{\mathbf{x}}} &= -\mathbf{T}^{-T} F_{\Delta} \mathbf{M} \mathbf{T}^{-1} \mathbf{U}^T \mathbf{C} \quad ; & \frac{\partial \mathbf{g}_2(\underline{\mathbf{x}})}{\partial \underline{\mathbf{q}}} &= \mathbf{E} \end{aligned} \quad (2.49)$$

Starten wir mit geeigneten Näherungswerten $\underline{\mathbf{x}}_o$ und $\underline{\mathbf{q}}_o$, so lauten die Anteile eines Dreiecks für das zu lösende Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}^T \mathbf{Q}_o \mathbf{C} & \mathbf{C}^T \mathbf{U} \\ -\mathbf{T}^{-T} F_{\Delta} \mathbf{M} \mathbf{T}^{-1} \mathbf{U}^T \mathbf{C} & \mathbf{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\Delta \mathbf{x}} \\ \underline{\Delta \mathbf{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{C}^T \mathbf{Q}_o \mathbf{C} \underline{\mathbf{x}}_o \\ -(\underline{\mathbf{q}}_o - \mathbf{T}^{-T} F_{\Delta} \mathbf{M} \underline{\boldsymbol{\epsilon}}_o) \end{bmatrix}. \quad (2.50)$$

Multiplizieren wir die zweite Zeile von links mit $-\mathbf{C}^T \mathbf{U}$ und addieren sie zur ersten Zeile, werden die Unbekannt $\underline{\Delta \mathbf{q}}$ vorwegeliminiert, und wir erhalten folgendes Gleichungssystem

$$\left[\mathbf{C}^T \mathbf{U} \mathbf{T}^{-T} F_{\Delta} \mathbf{M} \mathbf{T}^{-1} \mathbf{U}^T \mathbf{C} + \mathbf{C}^T \mathbf{Q}_o \mathbf{C} \right] \underline{\Delta \mathbf{x}} = -\mathbf{C}^T \mathbf{U} \mathbf{T}^{-T} F_{\Delta} \mathbf{M} \underline{\boldsymbol{\epsilon}}_o. \quad (2.51)$$

Anschließend berechnen wir die neuen Kraftdichten

$$\underline{\mathbf{q}} = \underline{\mathbf{q}}_o + \underline{\Delta \mathbf{q}} = \mathbf{T}^{-T} F_{\Delta} \mathbf{M} (\underline{\boldsymbol{\epsilon}}_o + \mathbf{T}^{-1} \mathbf{U}^T \mathbf{C} \underline{\Delta \mathbf{x}}). \quad (2.52)$$

Übertragen wir die Formulierungen auf das gesamte Netz, ergibt sich

$$\left[\mathbf{C}^T \mathbf{U} \mathbf{T}^{-T} F_{\Delta} \mathbf{M} \mathbf{T}^{-1} \mathbf{U}^T \mathbf{C} + \mathbf{C}^T \mathbf{Q}_0 \mathbf{C} \right]_N \underline{\Delta \mathbf{x}}_N = -(\mathbf{C}^T \mathbf{U} \mathbf{T}^{-T} F_{\Delta} \mathbf{M} \underline{\epsilon}_0)_N. \quad (2.53)$$

oder in zusammengefaßter Form

$$\mathbf{N} \underline{\Delta \mathbf{x}}_N = \underline{\mathbf{h}} \quad (2.54)$$

Sofern nur positive Spannungen vorkommen, handelt es sich um eine vorgespannte Konstruktion.

2.4.4 Membrane mit isotropem Material (Typ 1)

Beim ebenen Spannungszustand vereinfacht sich die Matrix \mathbf{M}_{ES} , falls isotropes Material gefordert wird

$$\mathbf{M}_{ES} = \begin{bmatrix} E_{1111} & E_{1122} & 0 \\ & E_{2222} & 0 \\ \text{sym.} & & 2E_{1212} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ & 1 & 0 \\ \text{sym.} & & 1-\nu \end{bmatrix}. \quad (2.55)$$

Die freien Parameter sind der Elastizitätsmodul E und die Querdehnzahl ν . Unabhängig von der Lage des Dreiecks im lokalen Koordinatensystem (Abb. 2.1.3), d.h. der Winkel α_{01} kann beliebig sein, ergibt sich das invariante Matrizenprodukt $\mathbf{N}_{ES} = \mathbf{T}^{-T} \mathbf{M}_{ES} \mathbf{T}^{-1}$ (vgl. Beweis im Anhang B.2).

2.4.5 Membrane mit orthotropem Material (Typ 2)

Bei orthotropem Material ist die Lage des Kett- und Schußfadens gegenüber den Dreiecksseiten von Bedeutung. Bisher wird sie über den Winkel α_{01} , der während des iterativen Berechnungsablaufs konstant bleibt, angegeben (Abb. 2.1.3). Da die Definition der Verzerrungen mit Hilfe der ebenen affinen Abbildung erfolgt, ist diese Vorgehensweise nicht geometrisch exakt.

Abhilfe bringt die Definition eines neuen Membranelements. Das räumliche Dreieck wird von zwei Geraden geschnitten, die die Kett- und Schußrichtung des textilen Membranmaterials repräsentieren. Die beiden Geraden schneiden sich im Schwerpunkt des Dreiecks. Der Kettfaden (u-Richtung) geht durch die Punkte $P(x_P, y_P, z_P)$ und $Q(x_Q, y_Q, z_Q)$, der Schußfaden (v-Richtung) geht durch die Punkte $R(x_R, y_R, z_R)$ und $S(x_S, y_S, z_S)$.

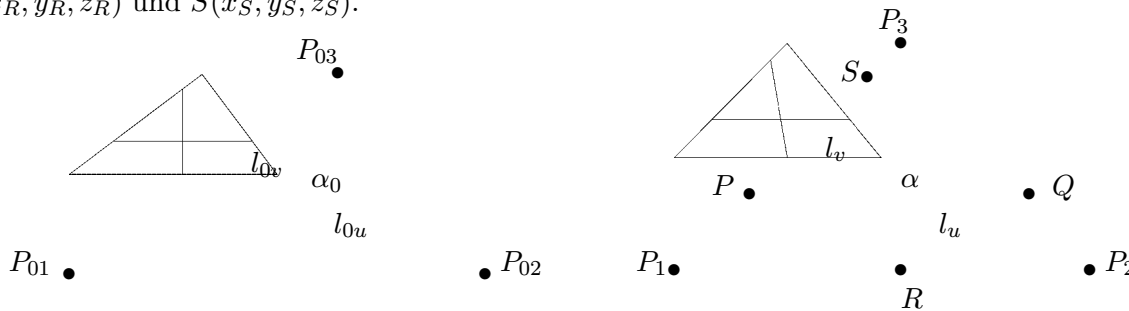


Abb. 2.4.1 Unverformter Zustand

Abb. 2.4.2 Verformter Zustand

Deutlich sehen wir die parallelentreue Abbildung der ebenen affinen Transformation. Der Kettfaden ist bei diesem Beispiel sowohl im unverformten wie auch im verformten Zustand parallel zur unteren Dreiecksseite. Die Vektoren für die Koordinaten und die Koordinatendifferenzen lauten

$$\underline{\mathbf{x}}_{(12,1)} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{x}}_P \\ \underline{\mathbf{x}}_Q \\ \underline{\mathbf{x}}_R \\ \underline{\mathbf{x}}_S \end{bmatrix}; \quad \underline{\mathbf{u}}_{(3,1)} = \begin{bmatrix} x_P - x_Q \\ y_P - y_Q \\ z_P - z_Q \end{bmatrix}; \quad \underline{\mathbf{v}}_{(3,1)} = \begin{bmatrix} x_R - x_S \\ y_R - y_S \\ z_R - z_S \end{bmatrix} \quad [m]. \quad (2.56)$$

Mit der Kanten-Knoten-Matrix \mathbf{C} , wobei \mathbf{E} die Einheitsmatrix mit der Dimension drei ist, erhalten wir

$$\begin{bmatrix} \underline{\mathbf{u}} \\ \underline{\mathbf{v}} \end{bmatrix} = \mathbf{C} \underline{\mathbf{x}} \quad [m] \quad ; \quad \mathbf{C}_{(6,12)} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_u \\ \mathbf{C}_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E} & -\mathbf{E} & \mathbf{o} & \mathbf{o} \\ \mathbf{o} & \mathbf{o} & \mathbf{E} & -\mathbf{E} \end{bmatrix} \quad [-]. \quad (2.57)$$

Die Strecken zwischen den Punkten P und Q bzw. R und S ergeben sich nach dem Satz des Pythagoras zu $l_u^2 = \underline{\mathbf{u}}^T \underline{\mathbf{u}}$ und $l_v^2 = \underline{\mathbf{v}}^T \underline{\mathbf{v}}$. Mit den Streckungen λ_u und λ_v können wir die gedehnten Längen l_u und l_v aus den ungedehnten Längen l_{0u} und l_{0v} wie folgt berechnen

$$l_u = \lambda_u l_{0u} \quad ; \quad l_v = \lambda_v l_{0v} \quad [m]. \quad (2.58)$$

Für das Quadrat der Strecke, die sich nach dem Kosinussatz aus dem Kett- und Schußfaden und dem eingeschlossenen Winkel berechnen läßt, gilt

$$s^2 = l_u^2 + l_v^2 - 2l_u l_v \cos \alpha \quad [m^2] \quad (2.59)$$

im verformten und

$$s_0^2 = l_{0u}^2 + l_{0v}^2 - 2l_{0u} l_{0v} \cos \alpha \quad [m^2] \quad (2.60)$$

im unverformten Zustand. Die Differenz der Streckenquadrate ergibt in Analogie zum ebenen lokalen Koordinatensystem

$$s^2 - s_0^2 = \underbrace{(\lambda_u^2 - 1) l_{0u}^2}_{2\epsilon_{uu}} + \underbrace{(\lambda_v^2 - 1) l_{0v}^2}_{2\epsilon_{vv}} - \underbrace{(\lambda_u \lambda_v \cos \alpha - \cos \alpha) 2l_{0u} l_{0v}}_{2\epsilon_{uv}} \quad [m^2]. \quad (2.61)$$

Wir definieren die zwei Verzerrungen ϵ_{uu} und ϵ_{vv} in u - und v -Richtung und die Schubverzerrung ϵ_{uv} in Bezug auf das Koordinatensystem, das vom Kett- und Schußfaden gebildet wird

$$\epsilon_{uu} = \frac{1}{2} \left[\frac{\underline{\mathbf{u}}^T \underline{\mathbf{u}}}{l_{0u}^2} - 1 \right]; \quad \epsilon_{vv} = \frac{1}{2} \left[\frac{\underline{\mathbf{v}}^T \underline{\mathbf{v}}}{l_{0v}^2} - 1 \right]; \quad \sqrt{2}\epsilon_{uv} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{\underline{\mathbf{u}}^T \underline{\mathbf{v}}}{l_{0u} l_{0v}} - \cos \alpha \right] \quad [-]. \quad (2.62)$$

Für die Beschreibung der Gleichgewichtsfigur benötigen wir die Ableitungen nach den unbekanntenen Koordinaten $\underline{\mathbf{x}}$ der Punkte P , Q und R , S

$$\frac{\partial \epsilon_{uu}}{\partial \underline{\mathbf{x}}} = \frac{\underline{\mathbf{u}}^T}{l_{0u}^2} \mathbf{C}_u \quad ; \quad \frac{\partial \epsilon_{vv}}{\partial \underline{\mathbf{x}}} = \frac{\underline{\mathbf{v}}^T}{l_{0v}^2} \mathbf{C}_v \quad ; \quad \frac{\partial \sqrt{2}\epsilon_{uv}}{\partial \underline{\mathbf{x}}} = \frac{1}{\sqrt{2}l_{0u} l_{0v}} \left[\underline{\mathbf{v}}^T \mathbf{C}_u + \underline{\mathbf{u}}^T \mathbf{C}_v \right] \quad [m^{-1}]. \quad (2.63)$$

In Matrixschreibweise mit dem Verzerrungsvektor $\underline{\boldsymbol{\epsilon}}_{(1,3)}^T = [\epsilon_{uu}, \epsilon_{vv}, \sqrt{2}\epsilon_{uv}]$

$$\frac{\partial \underline{\boldsymbol{\epsilon}}}{\partial \underline{\mathbf{x}}} = \begin{bmatrix} l_{0u}^{-2} & 0 & 0 \\ 0 & l_{0v}^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} l_{0u}^{-1} l_{0v}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{u}}^T & \mathbf{o} \\ \mathbf{o} & \underline{\mathbf{v}}^T \\ \underline{\mathbf{v}}^T & \underline{\mathbf{u}}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C}_u \\ \mathbf{C}_v \end{bmatrix} = \mathbf{L}_0^{-2} \mathbf{U}^T \mathbf{C} \quad [m^{-1}], \quad (2.64)$$

ergeben nach (2.44) sich die Anteile eines Dreiecks an den Gleichungen für die Gleichgewichtsfigur

$$\mathbf{g}(\underline{\mathbf{x}})_{(12,1)} = \mathbf{C}^T \mathbf{U} \mathbf{L}_0^{-2} F_{\Delta} \mathbf{M} \underline{\boldsymbol{\epsilon}} \quad [N], \quad (2.65)$$

die sich auf die vier Punkte P , Q und R , S beziehen (vgl. Abb. 2.4.2). Wie bisher fassen wir alles was nicht zur Kantenknotenmatrix und zur Matrix für die Koordinatendifferenzen gehört zum Kraftdichtevektor

$$\underline{\mathbf{q}}_{(3,1)} = \mathbf{L}_0^{-2} F_{\Delta} \mathbf{M} \underline{\boldsymbol{\epsilon}} = \mathbf{L}_0^{-2} F_{\Delta} \underline{\boldsymbol{\sigma}} \quad [Nm^{-1}] \quad (2.66)$$

zusammen, so daß auch in diesem Fall die Berechnung des Formfindungsmodells in einem linearen Rechenschritt möglich ist.

2.4.6 Kräfteverlauf im Dreieck

Die Kräfte, die im Kett- und Schußfaden auftreten, können wir den Teilverhältnissen entsprechend auf die Eckpunkte P_1 , P_2 und P_3 übertragen, da die Verformung des Dreiecks den Eigenschaften der ebenen affinen Transformation entspricht. Der Punkt P z.B. liegt dem Teilverhältnis t_{u1} nach auf der Kante $\overline{P_1P_3}$

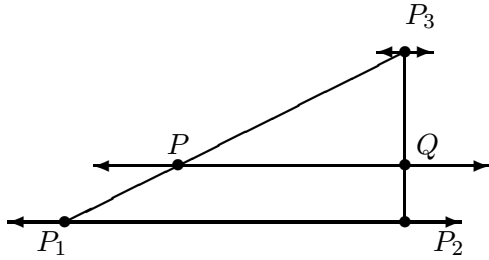


Abb. 2.4.3 Kräfteverlauf im Kettfaden

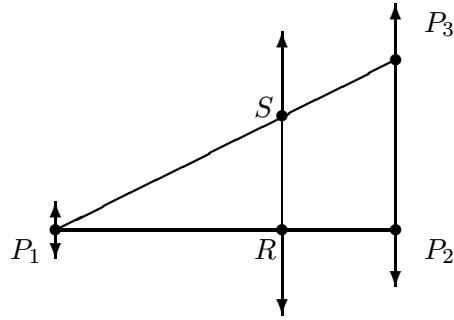


Abb. 2.4.4 Kräfteverlauf im Schußfaden

Fällt P mit P_3 bzw. P_1 zusammen, beträgt das Teilverhältnis $t_{u1} = -1$ bzw. $t_{u1} = 1$. Zwischen den Punkten gilt mit $m_{u1} = (1 - t)/2$, $p_{u1} = (1 + t)/2$ und $m_{u1} + p_{u1} = 1$ folgende linearen Bedingungsgleichungen

$$\underline{x}_P = m_{u1} \underline{x}_3 + p_{u1} \underline{x}_1 \quad [m]. \quad (2.67)$$

Zur exakten mathematischen Beschreibung des Dreieckselements benötigen wir vier Teilverhältniszahlen und vier Zuordnungszahlen, damit wir wissen, welche Dreieckskanten unter welchem Verhältnis von Kett- und Schußfaden geschnitten werden (vgl. Tab. 3.2.6).

2.4.7 Vergleich zwischen erstem (Typ 1) und zweitem (Typ 2) Membranelement

Der erste Ansatz (Typ 1) ist der ältere und wurde schon in der Diplomarbeit des Autors formuliert [78]. Wesentlich ist, daß die Gleichgewichtsbedingungen (2.47) und (2.48) sich auf die Dreiecksseiten beziehen. Die Transformation zwischen den Dreiecksseiten und dem Koordinatensystem, in dem das Materialgesetz gilt, gelingt über die Matrix \mathbf{T} (2.8). Die mathematische Beschreibung des Übergangs von der Membran zur Minimalfläche wird in dieser Darstellung deutlich. Besonders bei isotropem Materialgesetz ist dieser Ansatz zu empfehlen, da der Winkel α_{01} (Abb. 2.1.3) keine Bedeutung hat.

Der zweite Ansatz (Typ 2) zeichnet sich dadurch aus, daß die Beziehungen direkt im Koordinatensystem, in dem das Materialgesetz gilt, aufgestellt werden. Nachdem die Gleichgewichtsbedingungen für die vier Endpunkte des Kett- und Schußfadens hergeleitet sind, findet die Transformation auf die Dreieckspunkte über die Teilverhältniszahlen (2.67) statt. Von Vorteil ist die Kenntnis der exakten Lage des Kett- und Schußfadens im verformten Zustand.

2.5 Druckbelastete Membrane (Pneus)

Das bekannteste Beispiel für eine pneumatische Membrankonstruktion dürfte der Luftballon sein. Im Unterschied zu den vorgespannten doppeltgekrümmten Konstruktionen finden wir hier als weitere wesentliche formgebende Merkmale den Innendruck und das Volumen [61].

2.5.1 Bestimmung der Gleichgewichtsfigur

Nachdem die mathematischen Beziehungen für Seifenblasen und Membranen vorliegen, kann sofort das Potential für Pneus angeschrieben werden. Dazu ersetzen wir den vorderen Teil des Potentials der Seifenblase (2.31) durch das Potential der Membrane (2.42), und definieren

$$\Pi_N = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2} \underline{\epsilon}^T F_{\Delta} \mathbf{M} \underline{\epsilon} \right)_i - k(V(\underline{\mathbf{x}}_N) - V_N) \rightarrow \text{stat.} \quad [Nm]. \quad (2.68)$$

Wir erhalten folgende Anteile eines Dreiecks an der Gleichgewichtsfigur

$$\mathbf{g}_1(\underline{\mathbf{x}}, k) = \mathbf{C}^T \mathbf{U} \mathbf{T}^{-T} F_{\Delta} \mathbf{M} \underline{\epsilon} - \underline{\mathbf{b}} k \quad [N] \quad (2.69)$$

$$\mathbf{g}_2(\underline{\mathbf{x}}, k) = -(V(\underline{\mathbf{x}}_N) - V_N) \quad [m^3]. \quad (2.70)$$

Starten wir mit geeigneten Näherungswerten $\underline{\mathbf{x}}_0, \underline{\mathbf{q}}_0$ und k_0 , so lautet das zu lösende Gleichungssystem für das gesamte Netz, indem wir die zusammenfassende Schreibweise aus (2.54) benützen

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N} - \mathbf{H}_N & -\underline{\mathbf{b}}_N \\ \text{sym.} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\Delta \mathbf{x}}_N \\ \Delta k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{h}} + \underline{\mathbf{b}}_N k_0 \\ V_0(\underline{\mathbf{x}}_N) - V_N \end{bmatrix}. \quad (2.71)$$

Zu erwähnen sind die zusätzlichen zweiten Ableitungen \mathbf{H} , die aus der nichtlinearen Bedingungsgleichung zwischen den Unbekannten entstehen (vgl. Anhang A4). Die Rückrechnung der vorwegeliminierten Kraftdichten erfolgt wie in (2.52).

Dreiecksnetze im Computer

Die Bedeutung von Netzen in Natur und Technik ist erkannt. Nahezu jeden Tag werden wir mit Begriffen wie Vernetzung, Kommunikationsnetz, Netzwerk usw. konfrontiert. Analogiebetrachtungen zwischen geodätischen Streckennetzen und statischen Fachwerken eröffneten neue Forschungsbereiche z.B. auf Gebieten wie hydraulische- und elektrische Netze, oder Transportnetze. Die Trennung der netztypischen Strukturen von den eigentlichen physikalischen Vorgängen liegt allen Anwendungsgebieten zugrunde. Wesentlich ist die Reduktion aller Modelle auf die drei Begriffe: Koordinaten, Kanten-Knoten-Matrix und Kraftdichte.

Zur Beschreibung der hier genannten Flächen werden ausschließlich Dreiecksnetze verwendet. Nach den geometrischen und mechanischen Herleitungen im letzten Kapitel, die sich auf ein Dreieckselement beziehen, betrachten wir jetzt das gesamte Dreiecksnetz.

Umschließen Dreiecksnetze einen Körper, gehört jede Kante des Dreiecksnetzes zu genau zwei Dreiecken. Andernfalls bilden diejenigen Kanten, die sich nur zu einem Dreieck zuordnen lassen, den Rand des Netzes. Überschneidungen sind unzulässig. Jedes Dreieck definiert eine Ebene, sowohl im unverformten- wie auch im verformten Zustand. Knicke sind nur entlang der Kanten möglich.

Komplizierte Formen, mit vielen Krümmungswechseln, können mit Dreiecksnetzen, die aus einzelnen ebenen Dreiecken bestehen, nur dadurch hinreichend genau modelliert werden, indem wir die Anzahl der Dreiecke erhöhen. Zur Bestimmung der Gleichgewichtsfigur müssen für jeden freien Knoten des Netzes drei Unbekannte berechnet werden, so daß sich der numerische Aufwand durch die feinere Diskretisierung vergrößert.

3.1 Zur Ausgleichung großer Netze

Die Technik zur Bestimmung der Unbekannten großer Gleichungssysteme hat sich in den letzten Jahren verfeinert. Angewendet wurden solche Strategien z.B. bei der gemeinsamen Ausgleichung der unzentrierten Meßelemente bei der Neutriangulierung der Netze dritter und vierter Ordnung in Baden-Württemberg. Netze mit bis zu dreitausend Punkten wurden gemeinsam analysiert und ausgeglichen [2], [25].

Besonders bei der statischen Berechnung vorgespannter Membrankonstruktionen liegen die Näherungswerte der Unbekannten oft weit entfernt von der im Gleichgewicht befindlichen Form. Nur wenige in der Literatur aufgeführten Gleichungslöser konvergieren unter diesen Umständen und berechnen in annehmbaren Rechenzeiten die gewünschte Lösung. Der hier verwendete Gleichungslöser wurde neu entwickelt und vereinigt das Verfahren der konjugierten Gradienten mit Skalierung und die Hyper-Sparse-Technik. Mit den genannten Strategien können mehrere tausend Unbekannte effizient gelöst werden [15], [16], [29], [72], [73].

3.1.1 Das Verfahren der konjugierten Gradienten

Das Verfahren der konjugierten Gradienten zeichnet sich durch die iterative Berechnung des Lösungsvektors eines linearen Gleichungssystems aus und hat sich bestens bei nichtlinearen Vorgängen, die mit Ansätzen aus der Ausgleichsrechnung beschrieben wurden, bewährt. Beiträge zu diesem Verfahren befinden sich u.a. in [23], [77], und [79].

Gegeben sind die symmetrische Normalgleichungsmatrix \mathbf{N} und die rechte Seite $\underline{\mathbf{h}}$. Gesucht wird der Vektor $\underline{\mathbf{x}}$

$$\mathbf{N}\underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{h}}. \quad (3.1)$$

Mit den Startwerten

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{x}}_0 &= \mathbf{0} \\ -\underline{\mathbf{r}}_0 &= \underline{\mathbf{p}}_1 = \underline{\mathbf{h}} \end{aligned}$$

ergibt sich folgender iterativer Berechnungsablauf

$$\begin{aligned} \alpha_i &= \frac{\underline{\mathbf{r}}_{i-1}^T \underline{\mathbf{r}}_{i-1}}{\underline{\mathbf{p}}_i^T \mathbf{N} \underline{\mathbf{p}}_i} \\ \underline{\mathbf{x}}_i &= \underline{\mathbf{x}}_{i-1} + \alpha_i \underline{\mathbf{p}}_i \\ \underline{\mathbf{r}}_i &= \underline{\mathbf{r}}_{i-1} + \alpha_i \mathbf{N} \underline{\mathbf{p}}_i \\ \beta_i &= \frac{\underline{\mathbf{r}}_i^T \underline{\mathbf{r}}_i}{\underline{\mathbf{r}}_{i-1}^T \underline{\mathbf{r}}_{i-1}} \\ \underline{\mathbf{p}}_{i+1} &= -\underline{\mathbf{r}}_i + \beta_i \underline{\mathbf{p}}_i. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Der Lösungsvektor $\underline{\mathbf{x}}$ ist hinreichend genau bestimmt, falls $\underline{\mathbf{r}}^T \underline{\mathbf{r}}$ klein genug ist. Im Gegensatz zum Gauss'schen Algorithmus entfällt hier die symbolische Faktorisierung, und es entstehen keine zusätzlichen Füllelemente (Fill-ins). Das Umsortieren der Unbekannten bleibt ebenfalls erspart. Die Anzahl der Nichtnullelemente der Normalgleichungsmatrix liegt bei den in Kapitel 4 gezeigten Netzen mit hoher Anzahl von Knoten unter einem Prozent gegenüber der vollbesetzten Matrix.

Da die Kett- und Schußfäden aufgrund des Einflusses der Querdehnung im geodätischen Sinne korreliert sind, werden die einzelnen Nichtnullelemente der Normalgleichungsmatrix komplett aufgebaut. Die Variante, bei der die Nichtnullstruktur der Fehlergleichungsmatrix berücksichtigt und das Verfahren der konjugierten Gradienten angewendet wird, wurde nicht verfolgt.

3.1.2 Beispiel zu Hyper-Sparse-Matrizen

Bei der Sparse-Technik benützen wir nur diejenigen Elemente einer Matrix, die sich von Null unterscheiden. Zur Verwaltung sind daher mehrere Indexfelder, z.B. verkettete Listen, nötig. Handelt es sich bei den Elementen der Matrix um Submatrizen, sprechen wir von der Hyper-Sparse-Technik. Das angeführte Beispiel aus [80] zeigt die Art der Verwaltung von Hyper-Sparse-Matrizen. Besteht das Gleichungssystem (3.1) z.B. aus folgenden Submatrizen

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N}_{11(3,3)} & \mathbf{0} & \mathbf{N}_{13(3,2)} & \mathbf{N}_{14(3,1)} \\ & \mathbf{N}_{22(4,4)} & \mathbf{N}_{23(4,2)} & \mathbf{N}_{24(4,1)} \\ & & \mathbf{N}_{33(2,2)} & \mathbf{N}_{34(2,1)} \\ \text{sym.} & & & \mathbf{N}_{44(1,1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{x}}_{1(3,1)} \\ \underline{\mathbf{x}}_{2(4,1)} \\ \underline{\mathbf{x}}_{3(2,1)} \\ \underline{\mathbf{x}}_{4(1,1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{h}}_{1(3,1)} \\ \underline{\mathbf{h}}_{2(4,1)} \\ \underline{\mathbf{h}}_{3(2,1)} \\ \underline{\mathbf{h}}_{4(1,1)} \end{bmatrix}, \quad (3.3)$$

werden die Elemente der Normalgleichungsmatrix \mathbf{N} und die Elemente der rechten Seite \underline{h} in dieser Weise abgespeichert

$$\left[\begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 4 \\ & 3 & 5 \\ \text{sym.} & & 6 \end{array} \right] \\ \\ \left[\begin{array}{cccc} 16 & 17 & 19 & 22 \\ & 18 & 20 & 23 \\ & & 21 & 24 \\ \text{sym.} & & & 25 \end{array} \right] \\ \\ \text{sym.} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \left[\begin{array}{cc} 7 & 8 \\ 9 & 10 \\ 11 & 12 \\ 26 & 27 \\ 28 & 29 \\ 30 & 31 \\ 32 & 33 \\ 38 & 39 \\ \text{sym.} & 40 \end{array} \right] \\ \\ \left[\begin{array}{c} 13 \\ 14 \\ 15 \\ 34 \\ 35 \\ 36 \\ 37 \\ 41 \\ 42 \\ 43 \end{array} \right] \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{array} \right]$$

und über diese Indexfelder verwaltet

IND(1)=1 IAP(1)=1 IAQ(1)=1		IND(2)=3	IND(3)=4	IHP(1)=1
	IND(4)=2 IAP(2)=4 IAQ(2)=16	IND(5)=3	IND(6)=4	IHP(2)=4
		IND(7)=3 IAP(3)=7 IAQ(3)=38	IND(8)=4	IHP(3)=8
			IND(9)=4 IAP(4)=9 IAQ(4)=43	IHP(4)=10
			IAP(5)=10 IAQ(5)=44	IHP(5)=11

Tab. 3.1.1 Programmtechnische Realisierung von Hyper-Sparse-Matrizen

Im Einzelnen enthalten

- IND(I) I=1, ..., 9 die Submatrizenspalte der Submatrix I,
- IAP(I) I=1, ..., 5 die Anzahl der Submatrizen bis einschließlich derjenigen in der Submatrizenzeile I,
- IAQ(I) I=1, ..., 5 die Anfangsadresse des ersten Elementes von \mathbf{N} in der Submatrizenzeile I und
- IHP(I) I=1, ..., 5 die Anfangsadresse des ersten Elementes von \underline{h} in der Submatrizenzeile I.

3.1.3 Zur Skalierung von Gleichungssystemen mit Submatrizen

Die Skalierung der Normalgleichungsmatrix erhöht die Konvergenzgeschwindigkeit bei der Berechnung des Lösungsvektors und ist pro äußerer Iteration nur einmal nötig. Diese Technik auf Hyper-Sparse-Matrizen angewendet bedeutet, daß nicht nur die einzelnen Elemente der Hauptdiagonalen zu Eins werden, sondern daß jeweils die gesamte symmetrische Submatrix auf der Hauptdiagonalen zur Einheitsmatrix wird.

Zum besseren Verständnis führen wir ein ausgewähltes Beispiel an, bei dem das Gleichungssystem (3.1) in Submatrizenschreibweise

$$\begin{bmatrix} \mathbf{N}_{11(2,2)} & \mathbf{N}_{12(2,3)} \\ \text{sym.} & \mathbf{N}_{22(3,3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{x}}_{1(2,1)} \\ \underline{\mathbf{x}}_{2(3,1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{h}}_{1(2,1)} \\ \underline{\mathbf{h}}_{2(3,1)} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

oder ausführlich

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ \text{sym.} & 13 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 6 & 12 & 18 \\ 24 & 30 & 36 \end{bmatrix} \\ \text{sym.} & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ & 13 & 23 \\ \text{sym.} & & 77 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 73 \\ 230 \\ 137 \\ 235 \\ 369 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

lautet. Die Cholesky-Zerlegung $\mathbf{S}_{ii}^T \mathbf{S}_{ii} = \mathbf{N}_{ii}$ auf die Hauptdiagonalsubmatrizen angewandt ergibt bei unserem Beispiel

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \end{bmatrix}, \quad (3.6)$$

und wir erhalten die Inverse von \mathbf{S}

$$\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 18 & -12 & -2 \\ 0 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \end{bmatrix}. \quad (3.7)$$

Die nachfolgende Substitution $\underline{\mathbf{x}} = \mathbf{D}\underline{\mathbf{y}}$ führt uns auf das skalierte Gleichungssystem

$$\mathbf{D}^T \mathbf{N} \mathbf{D} \underline{\mathbf{y}} = \mathbf{D}^T \underline{\mathbf{h}},$$

in Submatrizenschreibweise

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}_{11} & \mathbf{D}_{11}^T \mathbf{N}_{12} \mathbf{D}_{22} \\ \text{sym.} & \mathbf{E}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{y}}_1 \\ \underline{\mathbf{y}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{11}^T \underline{\mathbf{h}}_1 \\ \mathbf{D}_{22}^T \underline{\mathbf{h}}_2 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

oder ausführlich

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \text{sym.} & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 6 & 0 & -1 \\ 4 & -2 & -1 \\ & 1 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 \\ \text{sym.} & & \text{sym.} & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 73 \\ 28 \\ 137 \\ -13 \\ -19 \end{bmatrix}. \quad (3.9)$$

Als Lösung des skalierten Gleichungssystems ergibt sich der Vektor $\underline{\mathbf{y}}^T = [13, 12, 11, 11, 6]$ und wir können mit der Substitutionsformel den gesuchten Vektor $\underline{\mathbf{x}}^T = [5, 4, 3, 2, 1]$ berechnen. Durch geschickte Anordnung des Algorithmus werden keine zusätzlichen Speicherplätze für die Normalgleichungsmatrix benötigt.

3.2 Datenorganisationsverfahren

Die Dreiecksnetze beinhalten eine Vielzahl von Informationen, falls wir sie zur statischen Berechnung komplizierter Formen, z.B. den gekammerten Pneu in Abb. 4.5.9, verwenden. Wie die Verwaltung von Knoten, Kanten, Dreiecken, Körpern, und ihrer zugehörigen Topologie, Geometrie und physikalischen Eigenschaften im Computer durchgeführt wird, erläutern die nachfolgenden Datenstrukturen.

Knoten: Die Liste der Knoten zeichnet sich dadurch aus, daß jeder Punkt eine Punktnummer besitzt. Neben den Koordinaten werden zusätzliche Attribute gespeichert. Die Punkte können fest, frei, beweglich oder gelagert sein.

Lfd.Nr	Punkt	x	y	z	Attribute
1	P_1	x_1	y_1	z_1	...
...

Tab. 3.2.1 Liste der Knoten

Kanten: Kanten sind durch die Punktnummern des Anfangs- und des Endpunktes in der Liste aufgeführt. Attribute sind bei Seilnetzen die ungedehnten Längen, die Kraftdichten und die Zugsteifigkeiten. Die hier behandelten Netze sind zwei- oder dreidimensional, so daß die Richtung der Kante keine Rolle spielt.

Lfd.Nr	Von	Nach	Attribute
1	P_1	P_2	...
...

Tab. 3.2.2 Liste der Kanten

Dreiecke: Die Liste der Dreiecke besteht aus den Punktnummern der Eckpunkte der Dreiecke, die in der Knotenliste aufgeführt sein müssen. Zu den Attributen der Dreiecke gehören die geometrischen und physikalischen Eigenschaften der Membranelemente (vgl. Tab. 3.2.5 bzw. Tab. 3.2.6).

Lfd.Nr	Dreiecks-Punkte			Attribute
1	P_1	P_2	P_3	...
...

Tab. 3.2.3 Liste der Dreiecke

Körper: Mehrere Dreiecke ($n \geq 4$) können einen Körper bilden. Besteht der Körper aus mehreren Kammern, ist das Ende einer Kammer durch eine Leerzeile gekennzeichnet. Attribute einer Kammer sind das Volumen und der Innendruck.

Lfd.Nr	Dreiecks-Punkte			Attribute
1	P_1	P_2	P_3	...
...
Leerzeile				

Tab. 3.2.4 Liste der Körper

Die Liste mit den geometrischen und physikalischen Eigenschaften eines Dreiecks werden bei den Membranelementen von Typ 1 und Typ 2 im einzelnen verdeutlicht:

Typ 1: Zu den Attributen gehören die ungedehnten Längen l_{01} , l_{02} , l_{03} und die Kraftdichten q_1 , q_2 , q_3 der Dreiecksseiten, der Winkel α_0 , den der Kettfaden mit der ersten Dreiecksseite bildet, und der Pointer m zum Material E_{1111} , E_{2222} , E_{1122} und E_{1212} .

l_{01}	l_{02}	l_{03}	q_1	q_2	q_3	α_0	m
...	1
Leerzeile							
Nr	E_{1111}	E_{2222}	E_{1122}	E_{1212}			
1			

Tab. 3.2.5 Attribute vom Membrantyp 1

Typ 2: Die Attribute sind: die ungedehnten Längen l_{0u} , l_{0v} , der Winkel α_0 , den der Kett- mit dem Schußfaden einschließt, die drei Kraftdichten q_{uu} , q_{vv} , q_{uv} , die vier Teilverhältniszahlen t_{u1} , t_{u2} , t_{v1} , t_{v2} und deren Nummern i_{u1} , i_{u2} , i_{v1} , i_{v2} zur zugehörigen Dreiecksseite, sowie der Pointer m zum Material.

l_{0u}	l_{0v}	α_0	q_{uu}	q_{vv}	q_{uv}	t_{u1}	t_{u2}	t_{v1}	t_{v2}	i_{u1}	i_{u2}	i_{v1}	i_{v2}	m
...	1
Leerzeile														
Nr	E_{1111}	E_{2222}	E_{1122}	E_{1212}										
1										

Tab. 3.2.6 Attribute vom Membrantyp 2

Über die Pointer m können wir den einzelnen Membranelementen unterschiedliche Materialkennwerte zuweisen und somit ein möglicherweise nichtlineares Materialverhalten modellieren. Bisher gab es keinen Anlaß dazu. Die jeweiligen Datenstrukturen bilden in ihrer Gesamtheit ein Objekt, in dem die topologischen, geometrischen und physikalischen Eigenschaften des Dreiecksnetzes im unverformten- und verformten Zustand redundanzfrei enthalten sind.

3.3 Generierungsoperatoren

Die hier beschriebenen Flächen werden durch Knoten, Kanten und Dreiecken strukturiert. Jahre-lange praktische Erfahrungen bestätigen die Aussage, daß eine fehlerfreie Erzeugung der Topolo-gie solcher Flächen von Hand nahezu unmöglich ist [30], [27], [25]. Wie die Generierung der Topologie mit geeigneten Operatoren durchgeführt wird, verdeutlicht das Beispiel einer Seifenblase, die aus zwei Kammern besteht.

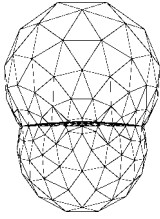


Abb. 3.2.1 Seifenblase

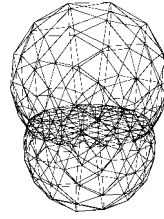


Abb. 3.2.2 Ansicht

Bei Seifenblasen liegt das Hauptproblem in der fehlerfreien Vermaschung und dem Zusammenfügen der einzelnen Kammern, da sich die Gleichgewichtsfigur nur durch die Vorgabe der Topologie und der Forderung nach minimaler Oberfläche unter Einhalten der konstanten Volumina in den Kammern einstellt.

Oft führen mehrere Generierungsmethoden zum Ziel. Ein möglicher Weg wird nachfolgend aufgezeigt.

1. Zuerst generieren wir den Rand. Dazu benötigen wir die ebenen Koordinaten der Punkte P_1 bis P_6 in Abb. 3.2.3, die Art der Kurve zwischen den Punkten (Gerade, Kreis, Ellipse, Parabel, usw.) und die Anzahl der Zwischenpunkte.
2. Der Rand muß in vierfacher Ausfertigung vorliegen und definiert damit vier Ebenen (vgl. 5.).
3. Die Flächen innerhalb der vier Ränder werden wie in Abb. 3.2.4 mit gleichseitigen Dreiecken, deren Anzahl in y -Richtung vorgegeben ist, gefüllt. Den Raum zwischen den Rändern und den gleichseitigen Dreiecken vermaschen wir über die Delaunay-Triangulierung.
4. Falls spitzwinklige Dreiecke entstehen, können wir mit Hilfe der Kraftdichtemethode wie in Abb. 3.2.5 gleichmäßigere Dreiecke erzeugen, indem wir den Rand festhalten und jeder Dreiecksseite eine konstante Kraftdichte zuweisen [17], [26], [24]. Dieses Vorgehen eignet sich auch zum Aufdecken von Vermaschungsfehlern.

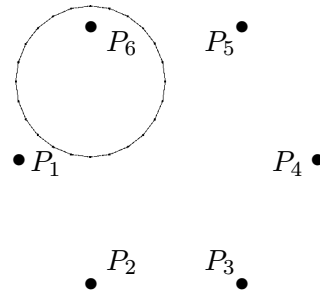


Abb. 3.2.3 Randgenerierung

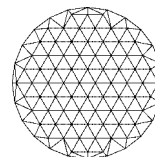


Abb. 3.2.4 Dreiecksvermaschung

5. Die Orientierung der Dreiecke in den vier Ebenen ist aus Abb. 3.2.6 ersichtlich (+ mathematisch positiv, - mathematisch negativ). Sie ist maßgeblich für die Wirkung des Innendrucks. Die neu generierten Punktnummern der Knoten in Ebene 2 und 3 müssen identisch sein. Die neu entstehenden Punktnummern in Ebene 1 und 4 dürfen jedoch nur einmal vorkommen.
6. Jetzt werden die einzelnen Teilflächen zusammengefügt, wobei die Knoten, deren Punktnummern mehrfach vorkommen, nur einmal berücksichtigt werden. Die Dreiecke der Ebenen 1 und 2 bilden die obere Kammer, die Dreiecke der Ebenen 3 und 4 die untere Kammer.
7. Aufgrund der identischen Punktnummern der Knoten in Ebene 2 und 3 definieren nur die Dreiecke der Ebenen 1, 2 und 4 das Membranmaterial. Dort spielt die Orientierung der Dreiecke keine Rolle. Zusätzlich bestimmen wir die Kraftdichten nach (2.46).
8. Mit dieser erzeugten Topologie, den konstanten Kraftdichten und der Vorgabe der Volumina in Kammer 1 und 2 ergibt sich die Näherungslösung in Abb. 3.2.7, wobei wir den Rand festhalten. Dies ist der erste Test, ob die Dreiecke richtig orientiert wurden.
9. Lassen wir alle Punkte frei und fordern zusätzlich minimale Oberfläche, entsteht die gesuchte Gleichgewichtsfigur in Abb. 3.2.1 bzw. 3.2.2.

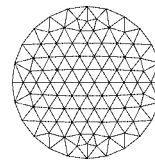


Abb. 3.2.5 Regelmäßigere Dreiecke

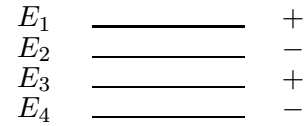


Abb. 3.2.6 Vier Ebenen

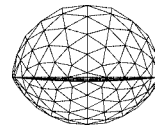


Abb. 3.2.7 Näherungslösung

Weitere Beispiele zu Seifenblasen und ihren Generierungsmethoden befinden sich in Kapitel 4.3.

Anwendungen

4.1 Allgemeine Bemerkungen

Nach den umfassenden mathematischen Herleitungen in Kapitel 2, den numerischen Methoden und Datenverwaltungstechniken in Kapitel 3, sollen in diesem Kapitel die gewonnenen Erkenntnisse ausführlich dargestellt und verdeutlicht werden. Ebenso erscheint es dem Verfasser unerlässlich, die Generierungsmethoden zum Erzeugen der Datensätze anzugeben, spiegeln diese doch oftmals die gesamte Bandbreite der Algorithmen wieder. Die Auswirkungen der Hyper-Sparse-Technik auf Abspeicherung der Normalgleichungsmatrix wird an einigen Beispielen angeführt.

4.1.1 Äußere Lasten

In der bisherigen Betrachtungsweise blieben äußere Lasten unberücksichtigt. Weder im Potential noch in den Gleichungen, die in Kapitel 2 die Gleichgewichtsfiguren beschreiben, werden sie berücksichtigt. Die Ursache dafür ist, daß die Beziehungen und Analogiebetrachtungen mit Hilfe der nichtlinearen Ausgleichsrechnung gefunden und gedeutet wurden. Dort gibt es bisher den Begriff der äußeren Lasten nicht. An dieser Stelle definieren wir den Vektor für die äußere Kraft, die z.B. auf den Punkt P_1 wirkt

$$\underline{\mathbf{s}}_{1(1,3)}^T = [s_{1x}, s_{1y}, s_{1z}] \quad [N]. \quad (4.1)$$

Somit lautet der Vektor, der die Komponenten der äußeren Last für das aus m Knoten bestehende Netz enthält

$$\underline{\mathbf{s}}_{N(1,3m)}^T = [\underline{\mathbf{s}}_1^T \underline{\mathbf{s}}_2^T \dots \underline{\mathbf{s}}_m^T] \quad [N]. \quad (4.2)$$

Da wir die äußere Belastung als Totlasten, also konfigurationsunabhängig, annehmen, erhalten wir für das Potential, wenn der Vektor $\underline{\mathbf{x}}_N^0$ den unbelasteten Zustand des gesamten Netzes darstellt,

$$\Pi_N^* = \Pi_N - \underline{\mathbf{s}}_N^T (\underline{\mathbf{x}}_N - \underline{\mathbf{x}}_N^0) \rightarrow \text{stat} \quad [Nm] \quad (4.3)$$

und es ergibt sich nach den Unbekannten abgeleitet

$$\frac{\partial \Pi_N^*}{\partial \underline{\mathbf{x}}_N} = \frac{\partial \Pi_N}{\partial \underline{\mathbf{x}}_N} - \underline{\mathbf{s}}_N^T \quad [N]. \quad (4.4)$$

Übertragen auf die bisher formulierten Gleichungen (2.16), (2.32) und (2.43) können wir sehr leicht erkennen, daß der Nullvektor durch den Vektor $\underline{\mathbf{s}}_N$ ersetzt werden muß. Für den Berechnungsalgorithmus bedeutet dies, daß wir einfach auf den Vektor $\underline{\mathbf{h}}$ aus z.B. (2.54), der bei der Anwendung des Newton-Verfahrens entsteht (2.17), (A.8), die Komponenten des Vektors $\underline{\mathbf{s}}_N$ aufaddieren müssen

$$\mathbf{N} \underline{\mathbf{x}}_N = \underline{\mathbf{h}} + \underline{\mathbf{s}}_N \quad [N]. \quad (4.5)$$

Vor jeder statischen Berechnung der Konstruktionen werden die Lasten für jeden Knoten entsprechend ihrem Einfluß, der i.a. von der Größe der umliegenden Dreiecke abhängt, bestimmt. Im Gegensatz zum Innendruck bleiben die Wirkungsrichtungen der äußeren Totlasten während der Berechnung konstant. Ist die Verformung groß, kann aus diesem Grund eine erneute Bestimmung der Lasten erforderlich werden. Da sie abhängig von der Lage des Koordinatensystems sind, stellen sie keine invariante Größen dar.

4.1.2 Spannungen

Spannungen sind ein wichtiges Hilfsmittel zur Beurteilung der Beanspruchung von vorgespannten Konstruktionen [8], [20], [82]. Für jedes Dreieckselement erhalten wir die Spannungen σ_{uu} , σ_{vv} im Kett- und Schußfaden und die Schubspannung σ_{uv} im verformten Zustand entsprechend unserer Definition in Kapitel 2.4.1. Oft bestehen die Flächen aus hunderten oder tausenden Dreiecken. Die nachfolgende Tabelle gibt einen Überblick von den maximalen- und minimalen Spannungswerten in den jeweils betroffenen Dreiecken.

	σ_{max}	index	σ_{min}	index
σ_{uu}
σ_{vv}
σ_{uv}

Fassen wir die Spannungen eines Dreiecks zu einer symmetrischen Matrix zusammen

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{uu} & \sigma_{uv} \\ \text{sym.} & \sigma_{vv} \end{bmatrix} \quad [Nm^{-1}] \quad (4.6)$$

und berechnen den Drehwinkel

$$\phi = \frac{1}{2} \arctan \frac{2\sigma_{uv}}{\sigma_{uu} - \sigma_{vv}} \quad [-], \quad (4.7)$$

erhalten wir die orthogonale Matrix \mathbf{R} aus (2.13) und können die Hauptspannungen $\lambda_{\sigma 1}$ und $\lambda_{\sigma 2}$ eindeutig angeben

$$\mathbf{A}_{\sigma} = \begin{bmatrix} \lambda_{\sigma 1} & 0 \\ 0 & \lambda_{\sigma 2} \end{bmatrix} = \mathbf{R}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{R} \quad [Nm^{-1}]. \quad (4.8)$$

Für die Darstellung der Spannungen oder der Hauptspannungen liegen entsprechende Visualisierungstechniken vor (vgl. Abb. 4.4.18 und Abb. 4.4.19).

4.2 Beispiele zu Minimalflächen

Die Bestimmung der Flächen kleinsten Flächeninhalts behandelte zuerst J. L. Lagrange im Jahre 1760. Dabei stellte er die Fläche in expliziter Form dar und gelangte zu einer Bedingungsgleichung für die zweiten Ableitungen. Die Aufgabe, Minimalflächen zu berechnen, nennt man das Plateausche Problem, welches physikalisch-statischen Betrachtungen seinen Ursprung verdankt. Im allgemeinen ist es jedoch nicht möglich, beliebige Minimalflächen mathematisch geschlossen zu beschreiben [40], [63].

Die Ideen für die Minimalflächen stammen aus den Abbildungen der Modelle in [58]. Experimentell können wir solche Flächen erzeugen, indem wir die geschlossene räumliche Kurve aus einem Draht nachbilden und ihn in eine geeignete Seifenlauge eintauchen. Beim Herausnehmen bildet sich dann eine Haut innerhalb des Drahtes. Vernachlässigen wir die von der Schwerkraft verursachte Deformation, so stellt sich eine Minimalfläche ein, deren mittlere Krümmung überall Null ist. Die Isotropie des Seifenhautmaterials und das Verschwinden der mittleren Krümmung haben die Spannungsgleichheit in jedem Punkt zur Folge [7], [38], [59], [60].

Zu jedem Beispiel sind die Geometrien der Ränder, die Anzahl der Punkte und die Anzahl der Dreiecke angegeben. Bei gleicher Topologie kann der hier vorgestellte Algorithmus direkt über die Größe der Fläche, die sich aus den einzelnen Dreiecksflächen zusammensetzt, mit anderen Berechnungsmethoden verglichen werden.

Anzahl der	Beispiel 1-3	Beispiel 4
Punkte	336	251
Membranelemente	624	436
Unbekannten	1008	753
Submatrizen	1296	937
Speicherplätze in NGL-Matrix	10656 $\cong 1.05\%$	7680 $\cong 1.35\%$

Tab. 4.2.1 Topologie der Flächen 1 bis 4

Zusammengefaßt stehen die einzelnen Ergebnisse in der nachfolgenden Tabelle

Beispiel	Formfindungsfläche [m ²]	Minimalfläche [m ²]
1	6.711	5.993
2	7.896	6.281
3	6.096	5.759
4	2.613	2.489

Tab. 4.2.2 Größe der Flächen 1 bis 4

1. Zuerst generieren wir den Rand. Dazu benötigen wir die ebenen Koordinaten der Punkte P_1 bis P_6 in Abb. 4.2.1, die Art der Kurve zwischen den Punkten (Gerade, Kreis, Ellipse, Parabel usw.) und die Anzahl der Zwischenpunkte. Die Koordinaten der Zwischenpunkte werden automatisch bestimmt.

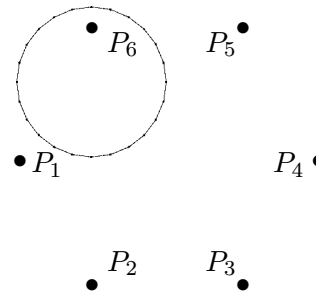


Abb. 4.2.1 Randgenerierung

2. Anschließend erzeugen wir die Topologie des Radialnetzes, indem wir die Koordinaten des Mittelpunktes, den Abstand der einzelnen Ringe und den Winkel zwischen den vom Mittelpunkt weglaufenden Geraden vorgeben. Bis auf die zum Mittelpunkt hinlaufenden Dreiecke erhalten wir überall viereckige Maschen.

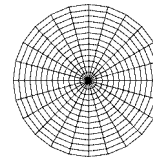


Abb. 4.2.2 Netzgenerierung

3. Die einzelnen viereckigen Maschen können wir sehr einfach in zwei Dreiecke unterteilen. Danach entfernen wir aus dem Netz den Mittelpunkt und alle Elemente, die mit ihm verknüpft sind und erhalten so die Topologie für die nachfolgenden Beispiele 1, 2 und 3.

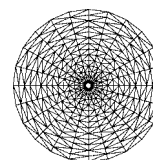


Abb. 4.2.3 Dreiecksvermaschung

Beispiel 1

Den Punkten des innersten Ringes werden die ebenen Koordinaten des äußeren Ringes zugewiesen und um 1m gegenüber dem Boden erhöht. Anschließend berechnen wir durch Vorgabe konstanter Kraftdichten die Gleichgewichtsfigur in einem linearen Rechenschritt. Dieser Vorgang wird nach unserer Definition als Formfindung bezeichnet.

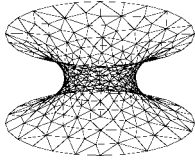


Abb. 4.2.4 Formfindungsmodell 1

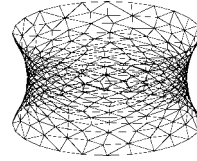


Abb. 4.2.5 Minimalfläche 1

Von dieser Gleichgewichtsfigur ausgehend erhalten wir die erste gesuchte Minimalfläche in einigen Iterationen. Wie wir aus der Tabelle 4.2.2 ersehen können, ist die Minimalfläche deutlich kleiner als die Formfindungsfläche. Der Ring am Boden und am Deckel besteht aus einem Polygonzug, der aus je 24 symmetrischen Teilen besteht.

Beispiel 2

Beim zweiten Beispiel ist der obere Ring 1.5m vom unteren Ring entfernt. Da der Radius $r=1\text{m}$ ist und der Winkel $\alpha = 15^\circ$ beträgt, umschließen die beiden Polygonzüge eine Fläche von $F_R = 24r^2 \sin \alpha = 6.212\text{m}^2$.

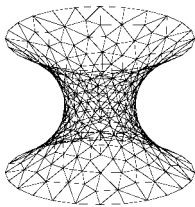


Abb. 4.2.6 Formfindungsmodell 2

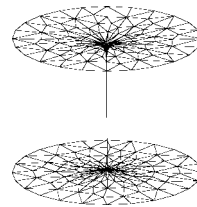


Abb. 4.2.7 Minimalfläche 2

Die Abweichung der berechneten Minimalfläche aus Tabelle 4.2.2 von der Sollfläche ist

$$\Delta F = F_{Min} - F_R = 0.069\text{m}^2 \cong 1.1\%.$$

Beispiel 3

Ausgehend vom Bild 4.2.4 wurde beim dritten Beispiel der obere Rand um 90° gedreht und um $0.5m$ in x - bzw. $-1m$ in y - Richtung verschoben.

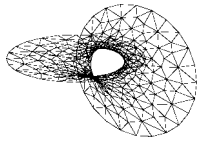


Abb. 4.2.8 Formfindungsmodell 3

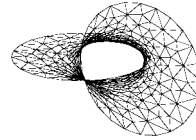


Abb. 4.2.9 Minimalfläche 3

Bei gleichbleibender Topologie ergeben sich die Gleichgewichtsfiguren in Abb. 4.2.8 und Abb. 4.2.9. Zu erkennen ist, daß das Auge beim Formfindungsmodell deutlich kleiner ist als bei der Minimalfläche.

Beispiel 4

Das Beispiel 4 zeigt, wie nach der Randgenerierung die innere Fläche mit gleichseitigen Dreiecken aufgefüllt wird. Die Vermaschung des Raums zwischen dem Rand, den die gleichseitigen Dreiecke bilden, und dem Rand geschieht über die Delaunay-Triangulierung.



Abb. 4.2.10 Randgenerierung

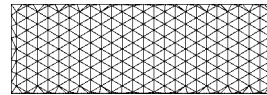


Abb. 4.2.11 Dreiecksvermaschung

Wiederum erhalten wir nach Vorgabe des dreidimensionalen Randes und konstanter Kraftdichte das Formfindungsmodell in einem linearen Rechenschritt

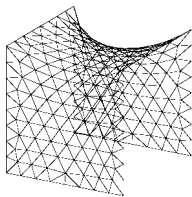


Abb. 4.2.12 Formfindungsmodell 4

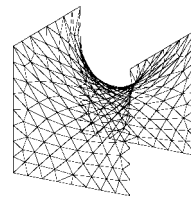


Abb. 4.2.13 Minimalfläche 4

und können anschließend die diskrete Minimalfläche iterativ bestimmen. Da die Ränder und die Topologien der Minimalflächen gegeben sind, kann der hier verwendete Algorithmus sehr leicht mit anderen Berechnungsmethoden, z.B. [12], verglichen werden. Der Algorithmus, der zur kleinsten Oberfläche führt, ist der bessere.

4.3 Beispiele zu Seifenblasen

Für den Fall des Zusammentreffens flüssiger Membrane sind *das Gesetz der kleinsten Flächen* und seine wichtigsten Punkte und Folgesätze in Thompson [81] dargestellt. Damit kein Mißverständnis zum bisherigen Sprachgebrauch in dieser Arbeit entsteht, wird das Wort Membran im Originaltext in Anführungszeichen gesetzt. Besser wäre an diesen Stellen das Wort „Oberfläche“ oder „Seifenhaut“.

1. *Es gilt ganz allgemein, daß in jedem flüssigem System dünner Schichten in stabilem Gleichgewicht die Summe der „Membranflächen“ ein Minimum ist.*
2. *Die Fläche einer j e d e n „Membran“ stellt unter ihren eigenen beschränkten Bedingungen ein Minimum dar.*
3. *Die mittlere Krümmung jeder „Membran“ ist über die ganze Fläche hinweg konstant und beträgt Null, wenn die Drucke auf beiden Seiten gleich sind. In anderen Fällen ist sie proportional zu ihrer Differenz.*
4. *Die „Membrane“, die sich in irgendeiner Kante treffen, sind ihrer drei an der Zahl.*
5. *Die Kämme oder Kanten, die sich in irgendeiner Ecke treffen, sind deren genau vier.*
6. *Die drei „Membrane“, die in einem Kamm oder in einer Kante zusammentreffen, bilden gleich große Winkel, und dasselbe trifft für die vier Kanten zu, die sich in einer Ecke treffen.*

In Kapitel 3.3 wurde gezeigt, wie das Computermodell einer aus zwei Kammern bestehenden Seifenblase generiert wird. Deshalb beschränken wir uns hier auf zwei Beispiele, in denen Seifenblasen mit drei und vier Kammern vorgestellt werden. Die Eingabedaten sind aus Tabelle 4.3.1 ersichtlich.

Anzahl der	Beispiel 5	Beispiel 6
Punkte	742	455
Kammern	3	4
Membranelemente	1542	1000
Dreiecke	1842	1600
Unbekannten	2229	1369
Submatrizen	3952	2717
Speicherplätze in NGL-Matrix	27756	18208
	$\cong 0.56\%$	$\cong 0.97\%$

Tab. 4.3.1 Topologie der Flächen

Beispiel 5

Zur Modellierung der Seifenblase, die aus drei Kammern besteht, müssen wir neun Teilflächen, drei äußere und sechs innere generieren. Durch Vorgabe des Randes (Abb. 4.3.1) und richtiges Zusammenfügen der Teilflächen erhalten wir nach der Kraftdichtemethode die Gleichgewichtsfigur Abb. 4.3.2. in einem linearen Rechenschritt.

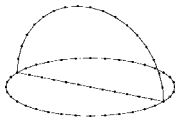


Abb. 4.3.1 Festhalten des Randes

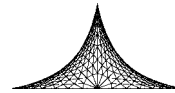


Abb. 4.3.2 Formfindungsmodell

Die Gleichgewichtsfigur Abb 4.3.3 entsteht, indem wir zusätzlich gleiche konstante Volumina in den Kammern fordern. Dies ist auch der erste Test, ob die Dreiecke der Teilflächen richtig orientiert wurden.

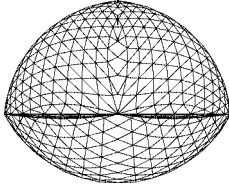


Abb. 4.3.3 Formfindungsmodell mit Innendruck

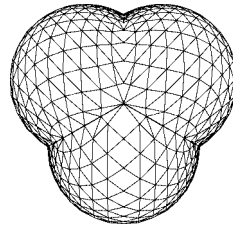


Abb. 4.3.4 Seifenblase mit drei gleichgroßen Kammern

Jetzt lassen wir alle 2226 Koordinaten frei, und der Berechnungsalgorithmus liefert ausgehend von den Näherungswerten von Abb. 4.3.3 in wenigen Iterationen die Gleichgewichtsfigur Abb. 4.3.4, bei der deutlich der Winkel von 120° zwischen den Kammern ersichtlich ist. Diese Gleichgewichtsfigur entsteht also aus der Forderung nach minimaler Oberfläche bei konstanten Volumina in den Kammern, falls die Topologie bekannt ist. Keine andere Figur besitzt unter diesen Bedingungen weniger Energie.

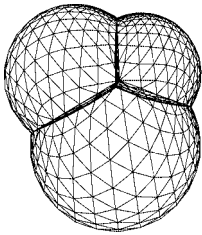


Abb. 4.3.5 Seifenblase mit drei verschiedenen Kammern

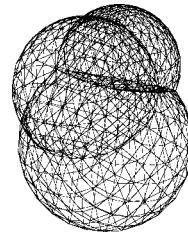


Abb. 4.3.6 Ansicht

Abb. 4.3.5 und Abb. 4.3.6 zeigen weitere Berechnungen von Seifenblasen mit unterschiedlichen Volumina in den drei Kammern.

Beispiel 6

Beim sechsten Beispiel stellen wir uns eine Pyramide mit dreieckiger Grundfläche vor. Von den sechs Kanten existieren sechs Flächen zum Schwerpunkt der Pyramide hin, so daß wir insgesamt zwölf innere und vier äußere Teilflächen generieren müssen.

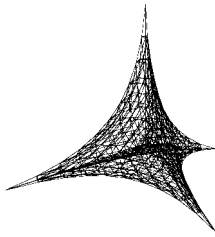


Abb. 4.3.7 Formfindungsmodell

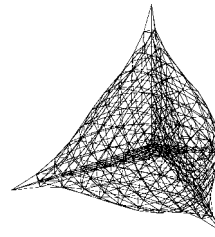


Abb. 4.3.8 Näherungslösung

Halten wir die vier Eckpunkte der Pyramide fest, ergibt sich das Formfindungsmodell Abb. 4.3.7. Wie beim ersten Beispiel geben wir anschließend gleiche konstante Volumina in den Kammern vor und prüfen nach, ob die Orientierung der Dreiecke in den Teilflächen stimmt.

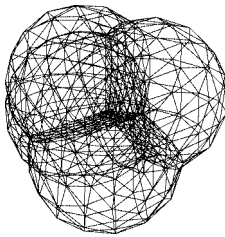


Abb. 4.3.9 Seifenblase mit vier Kammern

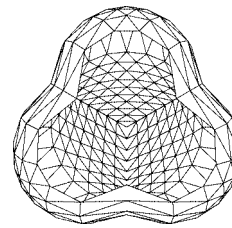


Abb. 4.3.10 Hidden-line Darstellung

Aus der Forderung nach minimaler Oberfläche bei konstanten Volumina in den Kammern stellt sich die Gleichgewichtsfigur in Abb. 4.3.9 ein, indem wir alle 1369 Koordinaten frei lassen. Bei Abb. 4.3.10 wurde der obere Teil der Seifenblase abgeschnitten, so daß wir in das Innere blicken können. Der Winkel im Raum, den die *ebenen* Teilflächen in der Mitte bilden, beträgt exakt $109^{\circ}28'$ [81].

4.4 Beispiele zu Membrane

Membranen spielen in der Dacharchitektur zum Bau weitgespannter Flächentragwerke eine herausragende Rolle. Sie zeichnen sich dadurch aus, daß sie keine Biegesteifigkeit besitzen, extrem massearm sind und sich für mobile Bauten und große Spannweiten eignen. Häufig verwendet man zum Bau solcher Konstruktionen textile Membranmaterialien, deren Verhalten unter Belastung durch zwei sich kreuzende Vorzugsrichtungen, Kett- und Schußrichtung, beschreibbar ist.

4.4.1 Grundlagen zur Membranberechnung

Die nächsten zwei Beispiele sollen die Leistungsfähigkeit des entwickelten Berechnungsalgorithmus verdeutlichen. In Kapitel 2 wurde die Definition der Verzerrungen mit Hilfe der affinen Abbildung durchgeführt, so daß für die Größe der Verformung des einzelnen Dreiecks aus kinematischer Sicht keinerlei Einschränkung besteht. Jedoch ist zu beachten, daß zwischen den Spannungen und den Verzerrungen ein lineares Materialgesetz angenommen wird, das nur bei kleinen Verzerrungen gilt. (vgl. Kap. 2.4.1). Hier handelt es sich bei der statischen Berechnung vorgespannter Membrankonstruktionen dennoch um ein nichtlineares Problem, da die Verzerrungen nichtlineare Funktionen der dreidimensionalen Koordinaten sind.

Die Beispiele werden mit dem Membranelement vom Typ 2 berechnet, wobei der Kett- und Schußfaden in den Dreiecken im unverformten Zustand rechtwinklig zueinander stehen. Die Proportionen zwischen den Beispielen A und B stimmen überein, und die dünnen Striche geben die Größe der Membran im unverformten Zustand wieder. Die Werte sind in einer für den Praktiker übertriebenen Rechenschärfe angegeben. Sie ermöglichen die Kontrolle der numerischen Ergebnisse durch die Handrechnung.

Beispiel 7

Gegeben ist eine rechteckige Membran, deren Breite 0.8m und deren Höhe 0.6m beträgt. Da die Verformungen nur in x - bzw. in y -Richtung stattfinden, genügt die Diskretisierung der Membran durch zwei Dreiecke.

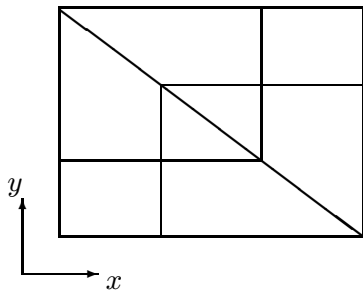


Abb. 4.4.1 Kett- und Schußfaden

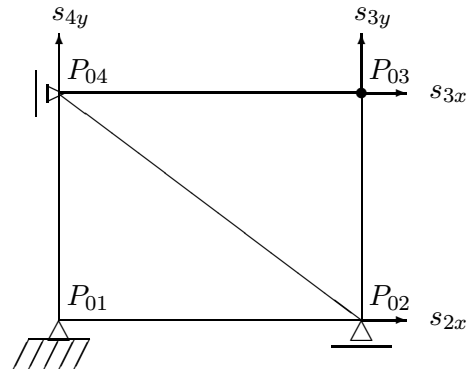


Abb. 4.4.2 Unverformter Zustand

Beim siebten Beispiel verwenden wir isotropes Material. Mit der Querdehnzahl $\nu = 0.3$ und dem Elastizitätsmodul $E_A = 910Nm^{-1}$ bzw. $E_B = 9.1Nm^{-1}$ lauten die Eingabewerte

	E_{1111}	E_{2222}	E_{1122}	$2E_{1212}$	s_{2x}	s_{3x}	s_{3y}	s_{4y}
	$[Nm^{-1}]$				$[N]$			
7 A	1000.0	1000.0	300.0	1400.0	6.0	6.0	8.0	8.0
7 B	10.0	10.0	3.0	14.0	6.0	6.0	8.0	8.0

Tab. 4.4.1 Eingabedaten für Beispiel 7

und wir erhalten mit den äußeren Lasten aus Tab. 4.4.1 folgende Verformungsfiguren

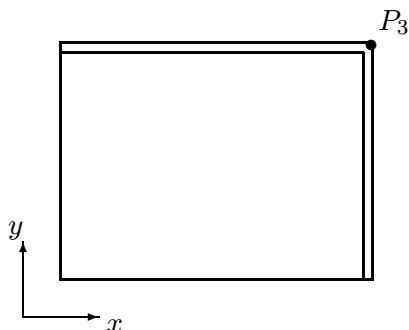


Abb. 4.4.3 Verformter Zustand 7 A

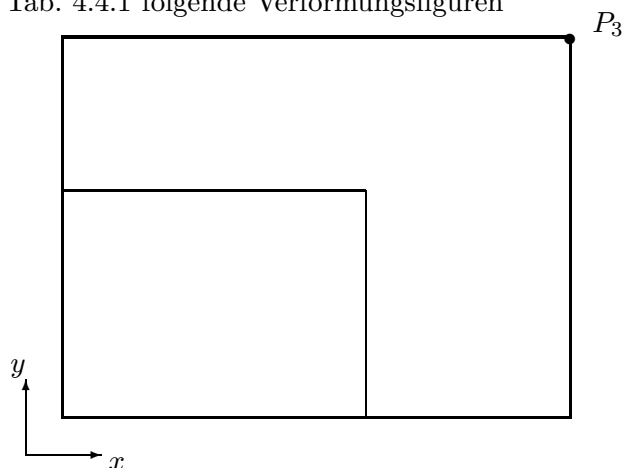


Abb. 4.4.4 Verformter Zustand 7 B

Die numerischen Ergebnisse lauten mit den Restkräften $r_{1x} = r_{4x}$ bzw. $r_{1y} = r_{2y}$

	x_3 [m]	y_3	ϵ_{uu}	ϵ_{vv}	ϵ_{uv}	σ_{uu}	σ_{vv}	σ_{uv}	r_{1x}	r_{1y}
			[Nm ⁻¹]			[-]			[N]	
7 A	0.81204	0.60903	0.0152	0.0152	0.0000	19.704	19.704	0.000	-6.000	-8.000
7 B	1.34564	1.00923	0.9146	0.9146	0.0000	11.890	11.890	0.000	-6.000	-8.000

Tab. 4.4.2 Ergebnisse von Beispiel 7

Eine kleine Handrechnung am Beispiel 7B verdeutlicht den Zusammenhang zwischen den ungedehnten bzw. den gedehnten Längen und den Verzerrungen (2.62) beim Kettfaden

$$\epsilon_{uu} = \frac{l_u^2 - l_{0u}^2}{2l_{0u}^2} = \frac{x_3^2 - x_{03}^2}{2x_{03}^2} = \frac{1.34564^2 - 0.8^2}{2 \cdot 0.8^2} = 0.9146 [-]$$

und den Zusammenhang zwischen den Verzerrungen und Spannungen (2.39)

$$\sigma_{uu} = E_{1111} \epsilon_{uu} + E_{1122} \epsilon_{vv} = 10Nm^{-1} 0.9146 + 3Nm^{-1} 0.9146 = 11.890Nm^{-1}.$$

Die anderen Werte berechnen sich analog. Zu betonen ist, daß die Variante 7B aufgrund der großen Verzerrungen und des linearen Materialgesetzes kein sinnvolles mechanisches Modell darstellt.

Beispiel 8

Beim achten Beispiel betrachten wir wieder eine Membran, deren Breite 0.8m und deren Höhe 0.6m beträgt, jedoch sind im Unterschied zu Beispiel 7 die Punkte P_3 und P_4 in y -Richtung gelagert und der Kett- und Schuffaden stehen im Winkel von 45° bzw. 135° zur x -Achse.

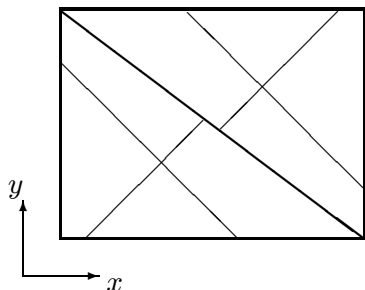


Abb. 4.4.5 Kett- und Schuffaden

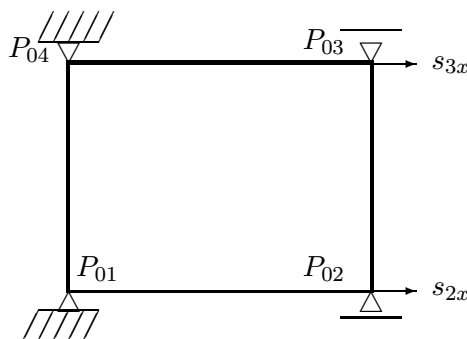


Abb. 4.4.6 Unverformter Zustand

Das Besondere an diesem Beispiel ist, daß nur die Schubsteifigkeit E_{1212} verschieden von Null vorgegeben ist. Somit lauten die Eingabedaten

	E_{1111}	E_{2222}	E_{1122}	$2E_{1212}$	s_{2x}	s_{3x}	s_{3y}	s_{4y}
	[Nm ⁻¹]				[N]			
8 A	0.0	0.0	0.0	1000.0	6.0	6.0	0.0	0.0
8 B	0.0	0.0	0.0	100.0	6.0	6.0	0.0	0.0

Tab. 4.4.3 Eingabedaten für Beispiel 8

und wir erhalten mit den äußeren Lasten aus Tab. 4.4.3 folgende Verformungsfiguren

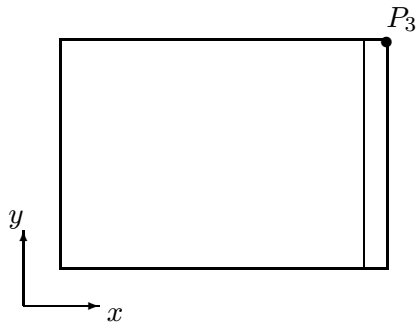


Abb. 4.4.7 Verformter Zustand 8 A

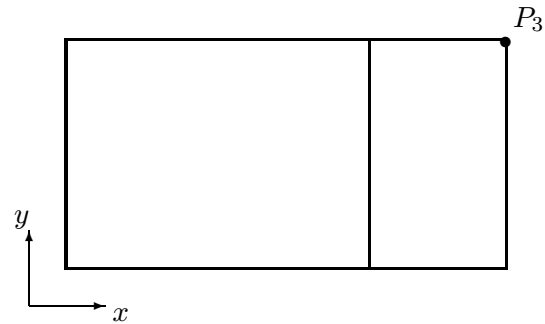


Abb. 4.4.8 Verformter Zustand 8 B

Die Ergebnisse lauten mit den Restkräften $r_{1x} = r_{4x}$ und $r_{1y} = r_{2y} = -r_{3y} = -r_{4y}$

	x_3	y_3	ϵ_{uu}	ϵ_{vv}	ϵ_{uv}	σ_{uu}	σ_{vv}	σ_{uv}	r_{1x}	r_{1y}
	[m]		[Nm ⁻¹]			[-]			[N]	
8 A	0.85763	0.60000	0.0373	0.0373	0.0373	0.000	0.000	37.313	-6.000	7.463
8 B	1.16021	0.60000	0.2758	0.2758	0.2758	0.000	0.000	27.581	-6.000	5.516

Tab. 4.4.4 Ergebnisse von Beispiel 8

Berechnen wir die Schubspannung, die wie eine Zug- und Druckfeder wirkt, im unverformten Zustand

$$\sigma_{uv0} = 2(s_{2x} + s_{3x})/y_{03} = 2(6N + 6N)/0.6m = 40Nm^{-1}$$

so ergeben sich beim Beispiel 8 B die Schubspannungen im verformten Zustand

$$\sigma_{uv} = \sigma_{uv0} \frac{x_{03}}{x_3} = 40.000Nm^{-1} \frac{0.8m}{1.16021m} = 27.581Nm^{-1}$$

und die Restkraft

$$r_{1y} = s_{1y} \frac{x_{03}}{x_3} = 8.000N \frac{0.8m}{1.16021m} = 5.516N$$

und wir sehen, daß sie mit den numerischen Ergebnissen aus Tab 4.4.4 übereinstimmen. Die anderen Werte berechnen sich analog.

4.4.2 Methoden zur Membranberechnung

Welche Möglichkeiten das Programmsystem zur Formfindung und statischen Berechnung von Membrankonstruktionen bietet, soll anhand der Freiflächenüberdachung im Bereich der Cafeteria der PH-Ludwigsburg verdeutlicht werden. Hierbei handelt es sich um eine Konstruktion aus fünf parabelförmigen Holzleimbindern unterschiedlicher Höhe und Spannweite, die von einem gemeinsamen inneren

Punkt strahlenförmig auseinanderlaufen. In den fünf Feldern ist eine Membrane sattelförmig zwischen die Bögen gespannt.

Zuerst geben wir die ebenen Koordinaten der Eckpunkte, den Radius der Ränder und die Anzahl der Zwischenpunkte vor, und wir erhalten die Ränder der fünf Teilflächen in diskreter Form (Abb. 4.4.13). Anschließend werden das Innere der Teilflächen mit der in y -Richtung gewünschten Anzahl von gleichseitigen Dreiecken gefüllt. Die Vermaschung des Raums zwischen dem Rand der Teilflächen und dem Rand, der durch die gleichseitigen Dreiecke gebildet wird, erfolgt mit Hilfe der Delaunay-Triangulierung (Abb. 4.4.14).

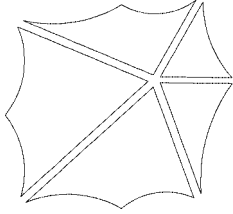


Abb. 4.4.13 Randgenerierung

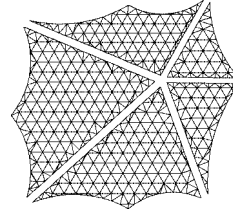


Abb. 4.4.14 Dreiecksvermaschung

Halten wir den Rand fest und geben jeder inneren Kante eine konstante Kraftdichte, liefert die Kraftdichtemethode Dreiecke im Innern der Teilflächen, die eine regelmäßigere Struktur, insbesondere am Rand, aufweisen (Abb. 4.4.15). Danach fügen wir die Teilflächen zusammen und definieren die Richtung der Kett- und Schußfäden in den Dreiecken der jeweiligen Teilfläche gegenüber der x -Achse (Abb. 4.4.16). Des weiteren liegen nun die Informationen über die Teilverhältniszahlen t_{u1} , t_{u2} und t_{v1} , t_{v2} vor. Nach Vorgabe unserer Wunschspannungen $\underline{\sigma}$ erhalten wir gleichzeitig die Werte für die Kraftdichten nach (2.46).

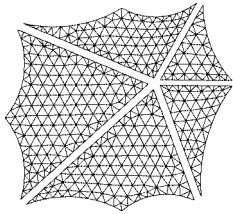


Abb. 4.4.15 Regelmäßigere ebene Dreiecke

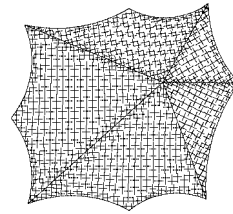


Abb. 4.4.16 Kett- und Schußfäden in den Dreiecken

Die bisherigen Operationen wurden ausschließlich in der x, y -Ebene getätigt. Jetzt benötigen wir die dreidimensionalen Koordinaten der Festpunkte. Bei unserem Beispiel sind es die Eckpunkte des Randes, der Mittelpunkt und die Punkte, die die Bögen repräsentieren. Zusätzlich muß der Rand durch ein Randseil modelliert werden. Die dafür erforderlichen Kraftdichten entnehmen wir aus der Seilnetzberechnung. Abb. 4.4.17 zeigt das Formfindungsmodell, das wir in einem linearen Rechenschritt nach der Kraftdichtemethode erhalten. Die Regelmäßigkeit der Spannungen im Kett- und Schußfaden in Abb. 4.4.18 läßt ersehen, daß die Kraftdichtemethode zu einer dreidimensionalen Gleichgewichtsfigur führt, die einen weitgehend homogenen Spannungsverlauf aufweist.

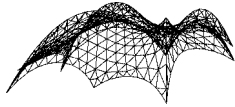


Abb. 4.4.17 Dreidimensionales Formfindungsmodell

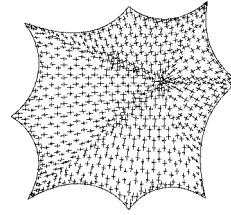


Abb. 4.4.18 Spannungsbild des Formfindungsmodells

Entspricht dieses Formfindungsmodell der Vorstellung des Anwenders, findet die Materialisierung statt, indem er die Steifigkeitswerte E_{1111} , E_{2222} , E_{1122} und E_{1212} vorgibt. Kennen wir zusätzlich in jedem Dreieck den Winkel α_0 zwischen Kett- und Schußfaden und ihre ungedehnten Längen l_{0u} und l_{0v} , können wir die statische Berechnung dieser Membrankonstruktion unter äußeren Lasten durchführen. Als Ergebnis erhalten wir in einem iterativen Prozeß die Koordinaten der Gleichgewichtsfigur, die Spannungen in den Kett- und Schußfäden im verformten Zustand und die Restkräfte, die an den Festpunkten angreifen. Abb. 4.4.19 zeigt z.B. den Spannungsverlauf der Membrane unter Schneelast.

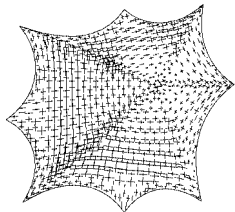


Abb. 4.4.19 Spannungsbild unter Schneelast

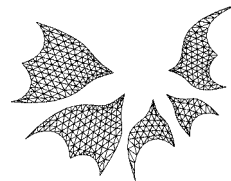


Abb. 4.4.20 Verebnung der einzelnen Teilflächen

Sind die Ergebnisse der statischen Berechnung und die Ästhetik der Membrankonstruktion für den Anwender zufriedenstellend, stellt sich die Frage nach der Form des Zuschnitts, d.h. wie sehen die einzelnen Streifen oder Teilflächen aus, die i.a. nur in der Ebene gefertigt werden können. Einen Vorschlag für den Zuschnitt sehen wir in Abb. 4.4.20. Dort wurde die Gesamtfläche in ihre fünf Teilflächen aufgeteilt und diese Teilflächen wurden als Ganzes unter Anwendung der Ausgleichsrechnung sowohl längen- als auch winkeltreu verebnet [4], [52]. In der Art eines iterativen Vorgangs können wir in den ebenen Zuschnittsflächen erneut die Richtungen der Kett- und Schußfäden gegenüber der x -Achse vorgeben und die Berechnungen wiederholen, bis das Computermodell die gewünschten Anforderungen erfüllt. Die Resultate dieses Beispiels beziehen sich auf die erste Iteration.

Das Programmsystem bietet die Möglichkeit, durch Variation des Randes bzw. der Zuschnittsflächen, der Lage des Kett- und Schußfadens, der Festpunktkoordinaten, der Steifigkeitswerte sowie der geeigneten Wahl der Diskretisierung diejenige Fläche zu modellieren, die später als baubar gilt [37], [83].

4.5 Beispiele zu Pneus

Bei den nächsten beiden Beispielen soll die Form eines Beutels modelliert werden [84]. Da wir luftundurchlässiges isotropes Membranmaterial voraussetzen, eignet sich für die Berechnung das Membranelement vom Typ 1. Hier wird ebenfalls deutlich, welchen Einfluß der Zuschnitt auf die Form des Beutels besitzt.

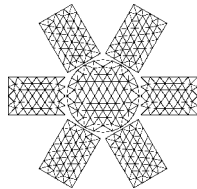


Abb. 4.5.1 Rechteckiger Zuschnitt

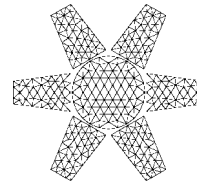


Abb. 4.5.2 Trapezförmiger Zuschnitt

Die Gleichgewichtsfiguren ergeben sich, indem wir den oberen Rand festhalten und gleichzeitig die Knoten durch Vorgabe eines geringen Innendrucks stabilisieren. In diesem Fall ist die Korrelate aus Gleichungssystem (2.71) keine Unbekannte, sondern wir geben sie als konstanten Wert vor, d.h. bei Anwendung des Algorithmus wird der Zuschlag Δk zu Null gesetzt. Der Beutel bildet keinen geschlossenen Körper, so daß wir den oberen Ring in die $z = 0$ Ebene transformieren müssen, damit wir das richtige Volumen im Innern des Beutels berechnen.

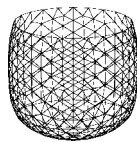


Abb. 4.5.3 Gleichgewichtsfigur des rechteckigen Zuschnitts

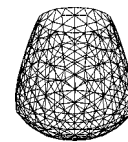


Abb. 4.5.4 Gleichgewichtsfigur des trapezförmigen Zuschnitts

Interessante Möglichkeiten bietet die statische Berechnung gekammerter Pneus. Wiederum generieren wir zuerst die Ränder und die Dreiecke im Innern der Teilflächen, die eine Kammer bestimmen. Indem wir den oberen und unteren Rand festhalten, berechnen wir nach der Kraftdichtemethode die erste Näherungslösung für eine Kammer. Anschließend geben wir die Werte für die Materialeigenschaften der Membrane vor, halten nur noch den unteren Rand fest und fordern konstantes Volumen in der Kammer. In Abb. 4.5.7 sehen wir diesen Vorgang, und die Gleichgewichtsfigur aus der statischen Berechnung zeigt uns, ob die richtige Orientierung der Dreiecke vorliegt.

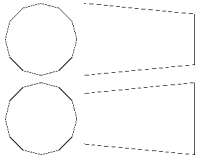


Abb. 4.5.5 Randgenerierung

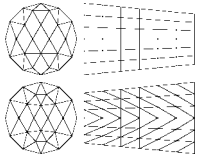


Abb. 4.5.6 Netzgenerierung



Abb. 4.5.7 Generierung einer Kammer

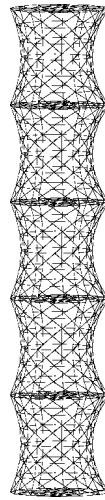


Abb. 4.5.8 Formfindungsmodell

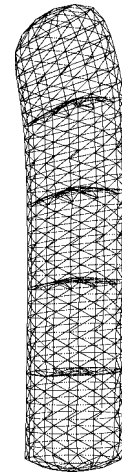


Abb. 4.5.9 Gekammerter Pneu

Danach multiplizieren wir die Teilkörper und fügen diese in geeigneter Weise zusammen. Wiederum liefert die Kraftdichtemethode in einem linearen Rechenschritt die Näherungslösung für die spätere statische Berechnung (Abb. 4.5.8), indem wir zunächst die Koordinaten der einzelnen Ringe der Kammern festhalten. In Abb. 4.5.9 sehen wir die Gleichgewichtsfigur, bei der nur der unterste Ring festgehalten wird. Die Vorgabe der Volumina in den einzelnen Kammern stabilisiert die gesamte Konstruktion. Zu beachten sind die Falten am rechten unteren Rand. Sie zeigen uns, daß wir den Zuschnitt günstiger wählen könnten.

4.6 Beispiele zur Gleichungslösung

Das Verfahren der konjugierten Gradienten hat sich in der Anwendung der Ausgleichsrechnung zur Lösung nichtlinearer Probleme bestens bewährt. Die Nichtlinearität der hier behandelten Probleme zeichnet sich dadurch aus, daß die Verbesserungen sehr groß gegenüber den Beobachtungen sein können und daß die Näherungswerte oft weit von der gesuchten Lösung entfernt liegen. Wie das Verfahren der konjugierten Gradienten solche Anforderungen bewältigt, verdeutlicht das nachfolgende Beispiel.

Beispiel 9

Die Eingabedaten für die Zuschnittsfläche in Abb. 4.6.1. entehmen wir aus Tab. 4.6.1.

Anzahl der	Beispiel 9
Punkte	475
Kammern	1
Membranelemente	906
Dreiecke	906
Unbekannten	1426
Submatrizen	2331
Speicherplätze in NGL-Matrix	16696 $\cong 0.82\%$

Tab. 4.6.1 Eingabedaten für Beispiel 9

Die Ausgangslage Abb. 4.6.2 erhalten wir in einem linearen Rechenschritt, indem wir die Kraftdichten und konstante äußere Lasten in positiver z-Richtung vorgeben und den Rand festhalten. Aus Tab. 4.6.2 ist ersichtlich, daß das Volumen unter dieser Gleichgewichtsfigur $V(\underline{x}) = 0.295m^3$ beträgt. Jetzt wählen wir in gewissermaßen spielerischer Weise die Steifigkeitswerte $E_{1111} = 1000Nm^{-1}$, $E_{2222} = 1200Nm^{-1}$, $E_{1122} = 500Nm^{-1}$ und $2E_{1212} = 30Nm^{-1}$ für jedes einzelne Dreieck und fordern ein Volumen von $V_N = 5.000m^3$ unter der Membrane. Die Variable i_{Innen} bedeutet die Anzahl der inneren Iterationen, die das Verfahren der konjugierte Gradienten zur Berechnung der Unbekannten benötigt (vgl. Kapitel 3.1.1). Ferner ist mit V_N das Volumen, F_N die Fläche und p der Innendruck in jedem Iterationsschritt angegeben.

$i_{Außen}$	i_{Innen}	$V_N [m^3]$	$F_N [m^2]$	$p [Nm^{-2}]$	$\kappa_h [N]$	$\kappa_x [m]$	$\kappa_q [Nm^{-1}]$
1	0	0.298	3.24	1.0	0.17E+02	0.00E+00	0.00E+00
2	65	7.621	20.43	694.2	0.83E+06	0.34E+02	0.15E+05
3	69	5.063	12.59	1048.3	0.11E+06	0.14E+02	0.71E+05
4	66	5.998	14.10	3272.9	0.34E+05	0.81E+01	0.44E+05
5	62	4.839	11.71	3755.7	0.75E+04	0.60E+01	0.71E+05
6	61	5.015	11.91	5257.8	0.16E+04	0.99E+00	0.41E+05
7	61	5.001	11.91	5424.6	0.31E+03	0.42E+00	0.14E+05
8	71	5.000	11.91	5439.2	0.27E+02	0.67E-01	0.32E+04
9	70	5.000	11.91	5440.0	0.56E+00	0.36E-02	0.55E+03
10	79	5.000	11.91	5440.0	0.98E-03	0.47E-04	0.42E+02

Tab. 4.6.2 Ergebnisse von Beispiel 9

Nach zehn äußeren Iterationen ($i_{Außen}$) stellt sich die gesuchte Gleichgewichtsfigur mit hinreichender Genauigkeit ein, d.h. die Variable $\kappa_h^2 = \underline{h}^T \underline{h}$ geht im Konvergenzbereich gegen Null und bestätigt die durchgreifende Kontrolle (vgl. Anhang A.4). Die Kontrollvariablen $\kappa_x^2 = \underline{\Delta x}^T \underline{\Delta x}$ und $\kappa_q^2 = \underline{\Delta q}^T \underline{\Delta q}$ berechnen sich aus den Zuschlägen für die Unbekannten.

Die Abbildungen 4.6.3 bis 4.6.8 zeigen die Koordinaten des Netzes während des iterativen Berechnungsablaufs bei Anwendung des Newton-Verfahrens.

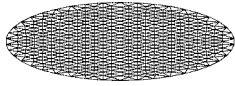


Abb. 4.6.1 Zuschnittsfläche

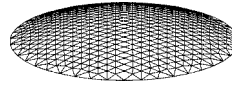


Abb. 4.6.2 Ausgangslage

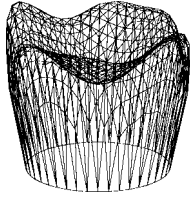


Abb. 4.6.3 1. Iteration

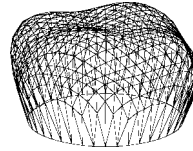


Abb. 4.6.4 2. Iteration

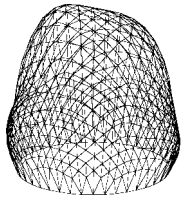


Abb. 4.6.5 3. Iteration

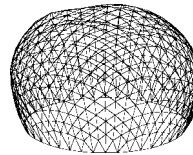


Abb. 4.6.6 4. Iteration

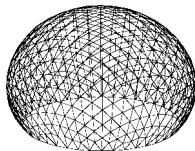


Abb. 4.6.7 5. Iteration

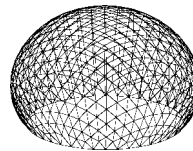


Abb. 4.6.8 10. Iteration

Deutlich zu sehen ist, daß sich die Koordinaten des Netzes nach dem fünften Iterationsschritt gegenüber der endgültigen Gleichgewichtsfigur kaum noch ändern (vgl. Tab. 4.6.2).

4.7 Genauigkeitsabschätzungen und Diskretisierungsfehler

In Kapitel 3 wurde gezeigt, wie die Generierung einer Seifenblase, die aus zwei Kammern besteht, erfolgt. Einfache geometrische und physikalischen Beziehungen, denen Seifenblasen zugrunde liegen, werden hier aufgeführt. Sie eignen sich besonders zur Beurteilung der Ergebnisse, die mit den hier beschriebenen Algorithmen erzielt werden.

Zwischen der Oberflächenspannung σ , dem Innendruck p und dem Radius r gilt bei einer Kugel folgende Beziehung

$$2\sigma = pr \quad [Nm^{-1}] \quad (4.9)$$

und wir erhalten für zwei Blasen die Verhältnisse

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{2\sigma/r_1}{2\sigma/r_2} = \frac{r_2}{r_1} \quad [-]. \quad (4.10)$$

Die Scheidewand muß wegen des Gleichgewichts einen Druck p_3 aufnehmen, der gleich der Differenz der beiden Drucke ist

$$p_3 = \frac{2\sigma}{r_3} = 2\sigma\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) = 2\sigma\left(\frac{r_1 - r_2}{r_1 r_2}\right) \quad [Nm^{-2}]. \quad (4.11)$$

Es folgt daraus, daß die Scheidewand gerade die Krümmung aufweisen muß, die zur Ausübung dieses Druckes nötig ist

$$r_3 = \frac{r_1 r_2}{r_1 - r_2} \quad [m]. \quad (4.12)$$

Die Scheidewand ist also ein Teil einer Kugeloberfläche [81]. Dies hat zur Folge, daß im Schnittpunkt der Trennwände die Tangenten an die Trennwände immer einen Winkel von 120° einnehmen, unabhängig von der Größe der Volumina in den Kammern. Wir kommen nun zu zwei numerischen Beispielen, bei denen wir die grobe und feine Diskretisierung der Seifenblase einer CAD-Konstruktion gegenüberstellen.

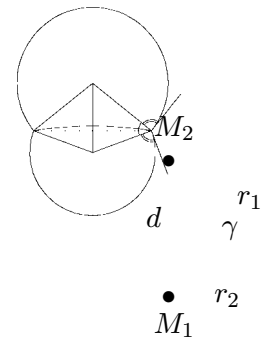
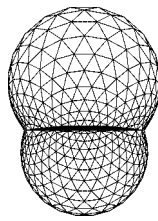
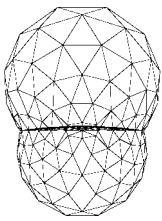


Abb. 4.7.1 Grobe Diskretisierung

Abb. 4.7.2 Feine Diskretisierung

Abb. 4.7.3 CAD-Konstruktion

Die einzelnen Eingabedaten für die grobe (**Beispiel 10**) und die feine Diskretisierung (**Beispiel 11**) sind aus Tab. 4.6.1 ersichtlich

Anzahl der	Beispiel 10	Beispiel 11
Punkte	252	900
Kammern	2	2
Membranelemente	522	1818
Dreiecke	696	2424
Unbekannten	758	2702
Submatrizen	1377	4833
Speicherplätze in NGL-Matrix	9509 $\cong 1.65\%$	33485 $\cong 0.46\%$

Tab. 4.6.1 Eingabedaten der beiden Seifenblasen

und wir erhalten mit den vorgestellten Algorithmen folgenden Ergebnisse, wobei wir die Radien über die Formel $r = 2/p$ berechnen können, da bei Seifenblasen die Oberflächenspannung $\sigma = 1Nm^{-1}$ ist.

Beispiel	$V [m^3]$	$p [Nm^{-2}]$	$r [m]$
10	$V_1 = 2.0000$	$p_1 = 2.4930$	$r_1 = 0.8022$
	$V_2 = 1.0000$	$p_2 = 2.9706$	$r_2 = 0.6733$
		$p_3 = 0.4776$	$r_3 = 4.1877$
11	$V_1 = 2.0000$	$p_1 = 2.4763$	$r_1 = 0.8077$
	$V_2 = 1.0000$	$p_2 = 2.9676$	$r_2 = 0.6740$
		$p_3 = 0.4913$	$r_3 = 4.0710$

Tab. 4.6.2 Ergebnisse der beiden Seifenblasen

Aus den Gleichgewichtsfiguren Abb. 4.7.1 und Abb. 4.7.2 extrahieren wir jeweils die drei Trennwände und berechnen mit dieser Fehlergleichung

$$0 + v_i = \sqrt{(x_i - x_m)^2 + (y_i - y_m)^2 + (z_i - z_m)^2} - r_m \quad [m] \quad (4.13)$$

die jeweiligen vier Unbekannten x_m, y_m, z_m und r_m der ausgleichenden Kugeln nach der Methode der kleinsten Quadrate. Die Abweichung $\Delta r = r_m - r$ zeigt die Genauigkeit der Ergebnisse

Beispiel	$x_m [m]$	$y_m [m]$	$z_m [m]$	$r_m [m]$	$\Delta r [m]$	$\Delta r/r [\%]$
10	0.0000	0.0000	0.5043	0.8291	0.0268	3.3
	0.0000	0.0000	-0.2474	0.6875	0.0142	2.1
	0.0000	0.0000	-4.1688	4.2042	0.0142	0.4
11	0.0000	0.0000	0.5086	0.8172	0.0095	1.2
	0.0000	0.0000	-0.2393	0.6787	0.0048	0.7
	0.0000	0.0000	-4.0414	4.0878	0.0167	0.4

Tab. 4.6.3 Werte der ausgleichenden Kugeln

Mit den beiden Radien r_1 und r_2 und dem Abstand der Kugelmittelpunkte $d = z_1 - z_2$ können wir mit Hilfe des Kosinussatzes den gesuchten Winkel

$$\gamma = \arccos\left(\frac{r_1^2 + r_2^2 - d^2}{2r_1r_2}\right) \quad [^\circ] \quad (4.14)$$

berechnen. Vergleichen wir die Ergebnisse mit dem Sollwert $\gamma = 60^\circ$,

Beispiel	$\gamma [^\circ]$	$\Delta\gamma [^\circ]$	$\Delta\gamma/\gamma [\%]$
10	58.54	1.46	2.4
11	59.82	0.18	0.3

Tab. 4.6.4 Abweichung vom Sollwert

stellen wir fest, daß die Abweichung 2.4% bzw. 0.3% beträgt [34], [33].

Analogiebetrachtungen

Im fünften Kapitel geht es um die Einordnung und Gegenüberstellung dieser Arbeit in bereits bekannte Berechnungsmethoden. Deshalb werden anschließend Analogien zur Seilnetzrechnung, zur Modellierung der Materialeigenschaft, zur Ausgleichsrechnung und zur Methode der finiten Elemente (FEM) aufgezeigt. Einige Interpretationen und Schlußfolgerungen führen zu Ergebnissen, die es zu diskutieren gilt.

5.1 Vergleich zwischen der Seilnetz- und der Membranberechnung

Der traditionelle Zugang zum zweidimensionalen Spannungs-Dehnungszustand bei vorgespannten Membrankonstruktionen erschließt sich i.a. aus der Seilnetzrechnung. Eine Einführung erhält man z.B. beim Besuch der Vorlesung „Analytische Formfindung leichter Flächentragwerke“ an der Universität Stuttgart. Die wesentlichen Begriffe lassen sich problemlos vom eindimensionalen Seil- auf das zweidimensionale Membranelement, hier vom Typ 1, übertragen [10], [50], [54], [57], [67].

Seil (eindimensional)			Membrane (zweidimensional)	
l, l_0	$[m]$	gedehnte und ungedehnte Länge	$\underline{l}, \underline{l}_0$	$[m]$
$\epsilon = (l - l_0)/l_0$	$[-]$	 Dehnung - Verzerrung	$\underline{\epsilon} = \mathbf{T}^{-1}(\underline{L}\underline{l} - \underline{L}_0\underline{l}_0)/2$	$[-]$
$\sigma = E\epsilon$	$[Nm^{-2}]$	 Spannung	$\underline{\sigma} = \mathbf{M}\underline{\epsilon}$	$[Nm^{-1}]$
$q = (A/l)\sigma$	$[Nm^{-1}]$	 Kraftdichte	$\underline{q} = \mathbf{T}^{-T}F_{\Delta}\underline{\sigma}$	$[Nm^{-1}]$
$\underline{s} = \mathbf{C}^T\underline{u}q$	$[N]$	 Kraft	$\underline{s} = \mathbf{C}^T\underline{U}\underline{q}$	$[N]$

An dieser Stelle ist anzumerken, daß die Spannungen sowohl bei Membranen als auch bei Seilen im Sinne des Hookeschen Gesetzes lineare Funktionen der Verzerrungen sind. Diese sind jedoch nichtlineare Funktionen der ungedehnten Längen und der Knotenkoordinaten. Die statische Berechnung vorgespannter Membrankonstruktionen erfordert eine möglichst exakte Kenntnis der ungedehnten Längen bzw. des Zuschnitts [42]. Fehlertheoretische Betrachtungen bestätigen die gewonnenen Erfahrungen mit dem Programmsystem.

Die dargestellte Definition der Kraftdichten für das Dreieckselement fand schon in der Diplomarbeit des Autors statt. Da der Flächeninhalt und die Transformationsmatrix während der Berechnung konstant bleiben, sind die Kraftdichten beim Membranelement proportional zu den Spannungen, was sich positiv auf den linearen Formfindungsprozeß auswirkt und sich somit von der Kraftdichtedefinition in der Seilnetzrechnung unterscheidet. Dies entspricht eher der Vorgehensweise des Ingenieurs als die ursprüngliche, ebenfalls gültige Definition: Kraftdichte gleich Kraft durch gedehnte Länge.

Generell sei hier noch einmal erwähnt, daß die Kraftdichte aus der Sicht des Mathematikers oder Informatikers auch als simpler Rechenrick gedeutet werden kann. Die Kraftdichte ist das Attribut einer Kante, wirkt sich auf die ein-, zwei- oder dreidimensionalen Koordinatendifferenzen zweier Punkte aus und muß zunächst keine physikalische Bedeutung, keine Einheit und kein bestimmtes Vorzeichen besitzen. Aufgabe wird es sein, in allen netztypischen Strukturen nach Aufstellen des Potentials, Herleiten der Ausgangsgleichungen und Trennung der netztopologischen Komponenten die Funktion der Kraftdichte zu interpretieren.

5.2 Übergang von der Membrane zur Seifenhaut bzw. Minimalfläche

Die Seifenhaut besitzt ihrer Definition nach ein isotropes Materialverhalten. Da es ebenfalls Membranen mit dieser Eigenschaft gibt, stellt sich die Frage, ob es möglich ist, mit dem Membranansatz eine Seifenhaut zu berechnen. Dazu vergleichen wir für ein Dreieck das Potential der Seifenhaut, das in quadratischer Form wie folgt lautet

$$\Pi_{Min} = \sum_{i=1}^n \sigma F_{\Delta i} = \sum_{i=1}^n \left(\underbrace{\mathbf{l}^T \mathbf{L}}_{\mathbf{v}_{Min}^T} \underbrace{\frac{\sigma}{16F_{\Delta}} \mathbf{M}_{Min}}_{\mathbf{P}_{Min}} \underbrace{\mathbf{L} \mathbf{l}}_{\mathbf{v}_{Min}} \right)_i \rightarrow \min \quad [Nm]. \quad (5.1)$$

mit dem Potential des Membranelements vom Typ 1

$$\begin{aligned} \Pi_{Mem} &= \sum_{i=1}^n \left(\boldsymbol{\epsilon}^T \frac{F_{\Delta}}{2} \mathbf{M}_{Mem} \boldsymbol{\epsilon} \right)_i \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\underbrace{(\mathbf{L} \mathbf{l} - \mathbf{L}_0 \mathbf{l}_0)^T}_{\mathbf{v}_{Mem}^T} \underbrace{\frac{1}{2} \mathbf{T}^{-T} \frac{F_{\Delta}}{2} \mathbf{M}_{Mem} \mathbf{T}^{-1} \frac{1}{2}}_{\mathbf{P}_{Mem}} \underbrace{(\mathbf{L} \mathbf{l} - \mathbf{L}_0 \mathbf{l}_0)}_{\mathbf{v}_{Mem}} \right)_i \rightarrow \min \quad [Nm] \end{aligned} \quad (5.2)$$

und dem bekannten Potential aus der Ausgleichsrechnung $\Pi = \mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}$. Aus der Forderung, daß $\Pi_{Min} = \Pi_{Mem}$ und $\mathbf{v}_{Min} = \mathbf{v}_{Mem}$ ist, erkennen wir sofort, daß bei der Minimalfläche die ungedehnten Längen \mathbf{l}_0 fehlen, d.h. es liegt kein Zuschnitt vor. Dies entspricht den Erfahrungen aus dem Experiment, denn die Minimalfläche nimmt sich gerade soviel Seifenlauge, wie sie zur Stabilisierung ihrer Gleichgewichtsfigur benötigt. Jetzt vergleichen wir die beiden Gewichte

$$\mathbf{P}_{Min} = \mathbf{P}_{Mem} \quad (5.3)$$

$$\frac{\sigma}{16F_{\Delta}} \mathbf{M}_{Min} = \mathbf{T}^{-T} \frac{F_{\Delta}}{8} \mathbf{M}_{Mem} \mathbf{T}^{-1}. \quad (5.4)$$

Nach dem Beweis aus Anhang B.3 ergibt sich unabhängig von der Lage des Dreiecks im lokalen Koordinatensystem folgende Matrix für das Membranmaterial

$$\mathbf{M}_{Mem} = \frac{\sigma}{2F_{\Delta}^2} \mathbf{T}^T \mathbf{M}_{Min} \mathbf{T} = 4\sigma \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 0 \\ \text{sym.} & & -1 \end{bmatrix} \quad [Nm^{-1}]. \quad (5.5)$$

Sonderbar erscheint auch das Fehlen der Dehnsteifigkeiten auf der Hauptdiagonalen der Matrix \mathbf{M}_{Mem} . Die physikalische Bedeutung dieses Sachverhalts gilt es zu diskutieren. Betrachten wir nun den Kräfteverlauf bzw. den Kraftdichteverlauf der Gleichgewichtsfiguren der Membrane und der Minimalfläche. Falls diese identisch sind, folgt

$$\mathbf{q}_{Min} = \mathbf{q}_{Mem} \quad [Nm^{-1}] \quad (5.6)$$

$$\frac{\sigma}{8F_{\Delta}} \mathbf{M}_{Min} \mathbf{L} \mathbf{l} = \mathbf{T}^{-T} F_{\Delta} \mathbf{M}_{Mem} \boldsymbol{\epsilon}. \quad (5.7)$$

Mit $\mathbf{M}_{Mem}^{-1} = 2F_{\Delta}^2 / \sigma \mathbf{T}^{-1} \mathbf{M}_{Min}^{-1} \mathbf{T}^{-T}$ ergeben sich die Dehnungen zu

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{\sigma}{8F_{\Delta}^2} \mathbf{M}_{Mem}^{-1} \mathbf{T}^T \mathbf{M}_{Min} \mathbf{L} \mathbf{l} = \frac{1}{4} \mathbf{T}^{-1} \mathbf{L} \mathbf{l} = \frac{1}{4} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{L}_0^2 \mathbf{L} \mathbf{l} \quad [-]. \quad (5.8)$$

Da bei Seifenhäuten die ungedehnten Längen nicht bekannt sind, können wir die Transformationsmatrix $\mathbf{T} = \mathbf{L}^2 \mathbf{D}$ aus den gedehnten Längen bestimmen. Wir erhalten für den Spannungsvektor

$$\underline{\boldsymbol{\sigma}} = M_{Mem} \frac{1}{4} \mathbf{D}^{-1} \underline{\boldsymbol{e}} \quad [Nm^{-1}] \quad (5.9)$$

oder mit den Kenntnissen aus (2.9) ausführlich

$$\begin{bmatrix} \sigma_{uu} \\ \sigma_{vv} \\ \sigma_{uv} \end{bmatrix} = \sigma \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 0 \\ \text{sym.} & & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \sigma \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad [Nm^{-1}]. \quad (5.10)$$

Da $\sigma_{uu} = \sigma_{vv} = 1Nm^{-1}$ und $\sigma_{uv} = 0Nm^{-1}$ ist, gibt es keine ausgezeichneten Hauptspannungen (4.8) und der Drehwinkel aus (4.7) ergibt sich nicht eindeutig. Dies entspricht unseren Erfahrungen, denn die Forderung nach minimaler Oberfläche hat Spannungsgleichheit in jedem Punkt zur Folge (vgl. Kapitel 4.2).

Der Beweis wurde ebenfalls programmtechnisch nachvollzogen. Es ist tatsächlich möglich, mit dem Membranelement vom Typ 1 und Typ 2 Minimalfächen zu berechnen. Bedingung hierfür ist das Weglassen der ungedehnten Längen und das Einführen des Membranmaterials aus (5.5). Der Flächeninhalt F_{Δ} des Dreiecks bleibt dabei nicht konstant und muß in jeder Iteration neu berechnet werden. Die Ergebnisse sind vollkommen identisch, sowohl in ihrer Geometrie als auch in ihrem Kräfteverlauf.

5.3 Die Ausgleichsrechnung in der Elastomechanik

Strategien zur Lösung von Problemen mit Hilfe der Ausgleichsrechnung befinden sich im Anhang A und setzen die Kenntnis der Standardwerke [5], [19], [22], [36], [85], den Veröffentlichungen [43], [45], [46]), [47], [48], [51], [54], [69], [70] und der Skripte [49], [68] voraus. Da es sich im Anhang A.4 nur um eine Art Formelsammlung handelt, sollen hier einige besondere Eigenschaften dieser Methode genannt werden, und weshalb sie sich für Probleme aus der Elastomechanik eignet.

- Die Ausgleichsrechnung ist ein Optimierungsverfahren, die diejenige Lösung anstrebt, in der das Potential minimal wird und (fehlerbehaftete) Beobachtungen verträglich gemacht werden.
- Die Lösung besitzt die Eigenschaft, daß sich die Verbesserungen der Beobachtungen, die sich auf eine Unbekannte beziehen, aufsummiert zu Null ergeben, da $\mathbf{A}^T \mathbf{P} \underline{\mathbf{v}} = \underline{\mathbf{q}}$ gilt.
- Die Methode zeichnet sich dadurch aus, daß die Größe der Verbesserung unabhängig von der Größe der Beobachtung sein kann. In dieser Arbeit sind die Werte für die Beobachtungen oft Null und alle Verbesserungen besitzen ein positives Vorzeichen.
- Liegt das mathematische Modell vor, ergeben sich die Verbesserungen der Beobachtungen bei der Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen immer gleich, unabhängig von der Wahl des Bezugssystems der Unbekannten. Deshalb spielen Starrkörperverschiebungen keine Rolle.
- Bei nichtlinearen Ansätzen besteht das Problem entweder in der Beschaffung von geeigneten Näherungswerten oder in der Suche nach linearen Ersatzmodellen.

Wie schon früher, bei der Gegenüberstellung von geodätischen Streckennetzen und statischen Fachwerken, können jetzt mit den aus Kapitel 5.1 und 5.2 gewonnenen Erkenntnissen Analogien zwischen der nichtlinearen Ausgleichsrechnung und der Elastomechanik aufgezeigt werden.

Ausgleichsrechnung

Elastomechanik

Korrelierte Beobachtungen $\underline{L}_b = \underline{\mathbf{0}}$
Gewichte $\mathbf{P} \neq \text{const}$

Seifenhaut

kein Zuschnitt $\underline{L}_o = \underline{\mathbf{0}}$
Steifigkeitsmatrix ändert sich

Unkorrelierte Beobachtungen $\underline{L}_b = \underline{\mathbf{0}}$
Gewichte $\mathbf{P} = \text{const}$

Formfindung

kein Zuschnitt $\underline{L}_o = \underline{\mathbf{0}}$
Vorgabe konstanter Kraftdichten $\underline{\mathbf{q}}$

Korrelierte Beobachtungen $\underline{L}_b > \underline{\mathbf{0}}$
Gewichte $\mathbf{P} = \text{const}$

Membrane
(isotrop)
Typ 1 und Typ 2

Zuschnitt vorhanden $\underline{L}_o > \underline{\mathbf{0}}$
Zwei Parameter E und ν definieren die
Steifigkeitsmatrix

Korrelierte Beobachtungen $\underline{L}_b > \underline{\mathbf{0}}$
Gewichte $\mathbf{P} = \text{const}$

Membrane
(orthotrop)
Typ 1 und Typ 2

Zuschnitt vorhanden $\underline{L}_o > \underline{\mathbf{0}}$
Vier Parameter E_{1111} , E_{2222} , E_{1122} und
 E_{1212} bestimmen das Materialgesetz

Unkorrelierte Beobachtungen $\underline{L}_b > \underline{\mathbf{0}}$
Gewichte $\mathbf{P} = \text{const}$

Membrane
(seilnetzartig)
Typ 1 und Typ2

Zuschnitt vorhanden $\underline{L}_o > \underline{\mathbf{0}}$
Zwei Parameter E_{1111} und E_{2222} be-
stimmen das Materialgesetz

Die unterstrichenen Typen sollen einen Hinweis darauf geben, welcher Typ Membranelement sich zur jeweiligen Berechnung am besten eignet.

Die Analogiebetrachtungen wirken sich wie folgt auf die Ausgleichsrechnung aus. Gelten bei der Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen Bedingungen zwischen den Unbekannten, z.B. bei der freien Netzausgleichung, so fanden die benötigten Korrelaten i.a. bisher keine Beachtung und wurden nur als Hilfsmittel benützt, um die gewünschte Lösung zu erhalten. Wie in Kapitel 2 und 4 gezeigt wurde, besitzt die Korrelate in der Berechnung von Seifenblasen und Pneus die geometrische Eigenschaft der Krümmung und die physikalische Wirkung des Innendrucks. Ebenfalls unberücksichtigt blieben bisher die Restkräfte, die z.B. bei der Netzausgleichung an den Festpunkten entstehen.

5.4 Die Methode der finiten Elemente im Vergleich

Die bisherigen Ausführungen zeigen Parallelen auf, die sich in der erfolgreichen Anwendung der Methode der finiten Elemente (FEM) in den Ingenieurwissenschaften widerspiegeln [1], [32], [39], [41], [75]. In wieweit eine Einordnung zu der FEM vorliegt, bleibt jedem nach dem Lesen der nachfolgenden Zeilen vorbehalten. Die wesentlichen Merkmale der Verfahren werden anschließend dargestellt, wobei Formulierungen aus dem Standardwerk von Zienkiewicz über FEM zitiert werden [86].

Übereinstimmungen beider Methoden

1. Beides sind allgemeine Diskretisierungsverfahren für Kontinuumsprobleme.
2. Das Kontinuum wird in eine endliche Anzahl von Teilen (Elementen) zerlegt, deren Verhalten durch eine endliche Anzahl von Parametern gekennzeichnet ist.
3. Die Elemente bestehen aus Eckpunkten (Knoten) und Verbindungen (Kanten).
4. Die Lösung für das Gesamtsystem als strukturelle Vereinigung seiner Elemente folgt genau den gleichen Regeln, wie sie auch für Probleme diskreten Charakters gelten.

Besondere Eigenschaften der hier vorgestellten Methode

1. Das **Netz** steht im Mittelpunkt unserer Betrachtungsweise. Mit Hilfe von Netzen, die aus **Dreiecken** bestehen, können wir Oberflächen in diskreter Form beschreiben.
2. Zur Formulierung des Potentials und zur Lösung des Gleichungssystems werden Verfahren aus der nichtlinearen Ausgleichsrechnung verwendet. Grundlage hierfür ist die **Methode der kleinsten Quadrate**.
3. Der vorgestellte Ansatz beginnt beim **Zuschnitt**, der ursprünglichen Einbaulänge des unverformten Dreiecks.
4. Die **Abbildung des Dreiecks** vom unverformten Zustand in den verformten Zustand wird **geometrisch exakt** mit Hilfe der affinen Abbildung beschrieben. Jeder Punkt des Netzes wird genau auf einen Punkt abgebildet. Die Kanten sind geradlinig und werden auf geradlinige Kanten abgebildet.
5. Die am Dreieck angreifenden Kräfte sind Ursache für die Verzerrung. Der unverformte und verformte Zustand des Elements legen eindeutig die Abbildungsgleichungen fest. Deshalb kann die **Verzerrung eines Dreiecks** nicht nur infinitesimal klein sondern **beliebig groß** sein.
6. Nach Festlegen der Materialeigenschaften bleibt die Steifigkeitsmatrix während der Berechnung konstant. Obwohl die Verzerrungen groß sein können, besteht zwischen dem Spannungs- und Verzerrungsvektor in dieser Betrachtungsweise ein linearer Zusammenhang.
7. Die **Definition der Kraftdichte** als Attribut der Kante ermöglicht die Formfindung in einem linearen Rechenschritt und gewährleistet eine gute Konvergenz der nichtlinearen statischen Berechnung.
8. Die Unbekannten zur Lösung der Gleichgewichtsfigur sind die globalen Knotenkoordinaten des Netzes und beispielsweise nicht die lokalen Verschiebungen der einzelnen Elementknoten.
9. Die **Ansätze sind invariant** gegenüber einer Translation und Rotation des kartesischen Koordinatensystems. Es treten **keine zusätzlichen Kräfte durch Starrkörperbewegungen** auf.

Die Punkte 4, 5 und 6 sind in sich konsistent. Außer Betracht bleibt hier, ob es tatsächlich Materialien gibt, die durch diesen linearen Zusammenhang beschrieben werden können.

Die Entscheidung zur Einordnung der in dieser Arbeit vorgestellten Methode soll durch einige Bemerkungen erleichtert werden.

Die Idee, die Unterteilung der Erdoberfläche zur Beschreibung der Geometrie in Streifen entlang der Meridiane und anschließend in Dreiecke fand Ende des 17. Jahrhunderts in Europa statt. Ist dieses Vorgehen mit der FEM vergleichbar?

Das Abbilden von Flächen im Raum auf Flächen im Raum oder in der Ebene gehört zu den traditionellen Tätigkeiten des Geometers. Die Verzerrungen sind abhängig von der Abbildungsvorschrift und können sehr groß sein. Anstatt der Abbildungsvorschrift sind in dieser Arbeit Kräfte für die Verzerrungen verantwortlich. Nachdem die Analogien vollzogen wurden, können beide Abbildungsvorgänge ineinander überführt werden.

Die Verwendung der Kraftdichtemethode zur Erzeugung von Formfindungsmodellen, die keine beliebige geometrischen Konstruktionen, sondern Gleichgewichtsfiguren darstellen, zur statischen Berechnung vorgespannter Konstruktionen oder auch zur Generierung regelmäßigerer Topologien bei ebener oder räumlicher Vermaschung, findet in der Standardliteratur der FEM bisher keine Beachtung.

Schlußbemerkungen

Diese Arbeit beinhaltet Methoden, mit denen Minimalflächen, Seifenhäute, Seifenblasen, Membrane und Pneus berechnet werden können. Umfassende mathematische Herleitungen verdeutlichen die geometrischen und physikalischen Zusammenhänge zwischen den unverformten- und verformten Zuständen der Flächen. Die wesentlichen Merkmale sind:

Die genannten Flächen werden durch Dreiecksnetze beschrieben. Verformen sich diese Flächen, so bildet sich jedes einzelne Dreieck nach den Gesetzen der affinen Abbildung wieder auf ein Dreieck ab, ohne daß Topologieänderungen des Netzes auftreten dürfen. Verantwortlich für die Abbildungsvorschrift ist die Tatsache, daß die gesuchte Figur sich im Gleichgewicht befinden soll. Dabei spielt die Größe der Verformung keine Rolle.

Die Formulierung der Heron'schen Formel zur Flächenberechnung des Dreiecks als quadratische Form in Matrixschreibweise erweist sich als äußerst hilfreich für die mathematische Beschreibung von Minimalflächen. Das Herleiten der Formeln für die Gleichgewichtsfigur und die Darstellung des Kräfteverlaufs innerhalb eines Dreiecks vereinfacht sich enorm. Ebenso sind durch diese Formulierung Analogiebetrachtungen zwischen Membranen aus isotropem Material und Minimalflächen durchführbar geworden.

Entscheidend für die Membranberechnung ist die Einführung der ungedehnten Längen als invariante Größen, die das Dreieck im unverformten Zustand beschreiben und die Definition dreier Kraftdichten. Diese ermöglichen die Berechnung des Formfindungsmodells und tragen zur Konvergenz der nichtlinearen statischen Berechnung unter Lasten bei. Die Beziehungen zwischen den Spannungen und Verzerrungen erfolgt für orthotropes Material durch das verallgemeinerte zweidimensionale Hookesche Gesetz.

Bei Seifenblasen und Pneus handelt es sich um Dreiecksnetze, die einen oder mehrere Körper umschließen. Als weitere formgebende Merkmale finden wir dort den Innendruck und das Volumen. Es konnte gezeigt werden, daß der Innendruck der Korrelate entspricht, die wir zur Einhaltung der Volumenbedingungsgleichung benötigen.

Allen angeführten Computermodellen liegt die Anwendung der nichtlinearen Ausgleichsrechnung auf netzartige Strukturen zugrunde. Neue effiziente Algorithmen aus dem Bereich der numerischen Mathematik und der Datenverarbeitung wurden entwickelt. Die Vorteile der beschriebenen Methoden werden durch zahlreiche Beispiele belegt.

Die Ausgleichsrechnung

Die Methode der kleinsten Quadrate wurde zu Beginn des 19. Jahrhunderts ungefähr gleichzeitig von Carl Friedrich Gauß und A.M. Legendre gefunden. Jahrzehntelange praktische Erfahrungen und theoretische Untersuchungen führen zu der Überzeugung, daß die Ausgleichsrechnung sich besonders zur Beschreibung von Vorgängen in Natur und Technik eignet. Schon (1870) schrieb C.F. Gauß (Werke V, Seite 28)

» *Es ist sehr merkwürdig, dass die freien Bewegungen, wenn sie mit den nothwendigen Bedingungen nicht bestehen können, von der Natur gerade auf dieselbe Art modificirt werden, wie der rechnende Mathematiker, nach der Methode der Kleinsten Quadrate, Erfahrungen ausgleicht, die sich auf unter einander durch nothwendige Abhängigkeit verknüpfte Grössen beziehen. Diese Analogie liesse sich noch weiter verfolgen, was jedoch gegenwärtig nicht zu meiner Absicht gehört.* «

Generell muß die Anzahl der Beobachtungen größer oder gleich der Anzahl der Unbekannten sein. Ist dies nicht der Fall, können weitere Bedingungsgleichungen eindeutig eine Lösung festlegen. Zusätzlich fordern wir, daß die Unbekannten durch das mathematische Modell bestimmbar sein müssen. Singuläre Systeme werden hier nicht untersucht. Das Newton-Verfahren benötigt bei nichtlinearen Problemen Näherungswerte, um eine Lösung finden zu können. Der Betrag und die Genauigkeit der Näherungswerte sind uninteressant, sofern das System zu den gewünschten Nullstellen konvergiert.

Da keine zusammenhängende und richtige Darstellung der nichtlinearen Ausgleichsrechnung bekannt ist, werden anschließend die wichtigsten Herleitungen der Lösungsstrategien in einer Art Formelsammlung aufgeführt. Voraussetzung für das Verständnis der Schlußfolgerungen ist die Kenntniss über die Standardwerke der Ausgleichsrechnung.

A.1 Die allgemeine nichtlineare Ausgleichsrechnung

Als Grundlage für die allgemeine nichtlineare Ausgleichsrechnung definieren wir folgende Vektoren, wobei die kleinen Buchstaben n die Anzahl der Beobachtungen, h die Anzahl der Unbekannten, r die Anzahl der Bedingungsgleichungen zwischen den Beobachtungen und u die Anzahl der Bedingungsgleichungen zwischen den Unbekannten bedeuten.

geg.:	$\underline{l}_{b(1,n)}^T = [l_1, l_2, \dots, l_n]$	Vektor der Beobachtungen
	$\underline{s}_{1(1,r)}^T = [s_{11}, s_{12}, \dots, s_{1r}]$	Sollwerte für die ersten Bedingungsgleichungen
	$\underline{s}_{2(1,u)}^T = [s_{21}, s_{22}, \dots, s_{2u}]$	Sollwerte für die zweiten Bedingungsgleichungen
	$\mathbf{P}_{(n,n)}$	Gewichtsmatrix der Beobachtungen
ges.:	$\underline{v}_{(1,n)}^T = [v_1, v_2, \dots, v_n]$	Vektor der Verbesserungen
	$\underline{x}_{(1,h)}^T = [x_1, x_2, \dots, x_h]$	Vektor der Unbekannten
	$\underline{k}_{1(1,r)}^T = [k_{11}, k_{12}, \dots, k_{1r}]$	Erster Korrelatenvektor
	$\underline{k}_{2(1,u)}^T = [k_{21}, k_{22}, \dots, k_{2u}]$	Zweiter Korrelatenvektor
	$\underline{k}_{3(1,n)}^T = [k_{31}, k_{32}, \dots, k_{3n}]$	Dritter Korrelatenvektor

Zwischen den Beobachtungen, den Verbesserungen und zwischen den Unbekannten gelten jeweils Bedingungsgleichungen

$$\mathbf{g}_1(\underline{\mathbf{l}}_b + \underline{\mathbf{v}}) - \underline{\mathbf{s}}_1 = \underline{\mathbf{o}} \quad (\text{A.1})$$

$$\mathbf{g}_2(\underline{\mathbf{x}}) - \underline{\mathbf{s}}_2 = \underline{\mathbf{o}} \quad (\text{A.2})$$

$$\underline{\mathbf{l}}_b + \underline{\mathbf{v}} - \mathbf{f}(\underline{\mathbf{x}}) = \underline{\mathbf{o}}. \quad (\text{A.3})$$

Das erweiterte Potential lautet mit den Veränderlichen $\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{v}}, \underline{\mathbf{k}}_1, \underline{\mathbf{k}}_2, \underline{\mathbf{k}}_3$

$$\Phi(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{v}}, \underline{\mathbf{k}}_1, \underline{\mathbf{k}}_2, \underline{\mathbf{k}}_3) = \underline{\mathbf{v}}^T \mathbf{P} \underline{\mathbf{v}} - 2 \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{k}}_1^T & \underline{\mathbf{k}}_2^T & \underline{\mathbf{k}}_3^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1(\underline{\mathbf{l}}_b + \underline{\mathbf{v}}) - \underline{\mathbf{s}}_1 \\ \mathbf{g}_2(\underline{\mathbf{x}}) - \underline{\mathbf{s}}_2 \\ \underline{\mathbf{l}}_b + \underline{\mathbf{v}} - \mathbf{f}(\underline{\mathbf{x}}) \end{bmatrix} \rightarrow \text{stat}, \quad (\text{A.4})$$

wobei $\underline{\mathbf{k}}_1, \underline{\mathbf{k}}_2, \underline{\mathbf{k}}_3$ Lagrange-Parameter sind. Da die Bedingungsgleichungen (A.1), (A.2) und (A.3) im Konvergenzpunkt erfüllt sein müssen, können wir das Potential ebenfalls schreiben

$$\Phi = \underline{\mathbf{v}}^T \mathbf{P} \underline{\mathbf{v}} \rightarrow \text{stat}. \quad (\text{A.5})$$

unter den Nebenbedingungen (A.1), (A.2) (A.3). Die Ableitungen der Funktionen \mathbf{g}_1 nach den Verbesserungen $\underline{\mathbf{v}}$ ergibt die Jakobi-Matrix \mathbf{B}_1^T , die Ableitungen der Funktionen \mathbf{f} und \mathbf{g}_2 nach den Unbekannten $\underline{\mathbf{x}}$ die Jakobi-Matrix \mathbf{A} bzw. \mathbf{B}_2^T

$$\mathbf{B}_{1(r,n)}^T = \frac{\partial \mathbf{g}_1(\underline{\mathbf{l}}_b + \underline{\mathbf{v}})}{\partial \underline{\mathbf{v}}}; \quad \mathbf{B}_{2(u,h)}^T = \frac{\partial \mathbf{g}_2(\underline{\mathbf{x}})}{\partial \underline{\mathbf{x}}}; \quad \mathbf{A}_{(n,h)} = \frac{\partial \mathbf{f}(\underline{\mathbf{x}})}{\partial \underline{\mathbf{x}}}. \quad (\text{A.6})$$

Nach den Veränderlichen abgeleitet und transponiert erhalten wir die Ausgangsgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial \underline{\mathbf{x}}} &= \mathbf{h}_1(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{v}}, \underline{\mathbf{k}}_1, \underline{\mathbf{k}}_2, \underline{\mathbf{k}}_3) = -\mathbf{B}_2 \underline{\mathbf{k}}_2 + \mathbf{A}^T \underline{\mathbf{k}}_3 = \underline{\mathbf{o}} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \underline{\mathbf{v}}} &= \mathbf{h}_2(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{v}}, \underline{\mathbf{k}}_1, \underline{\mathbf{k}}_2, \underline{\mathbf{k}}_3) = \mathbf{P} \underline{\mathbf{v}} - \mathbf{B}_1 \underline{\mathbf{k}}_1 - \underline{\mathbf{k}}_3 = \underline{\mathbf{o}} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \underline{\mathbf{k}}_1} &= \mathbf{h}_3(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{v}}, \underline{\mathbf{k}}_1, \underline{\mathbf{k}}_2, \underline{\mathbf{k}}_3) = -(\mathbf{g}_1(\underline{\mathbf{l}}_b + \underline{\mathbf{v}}) - \underline{\mathbf{s}}_1) = \underline{\mathbf{o}} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \underline{\mathbf{k}}_2} &= \mathbf{h}_4(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{v}}, \underline{\mathbf{k}}_1, \underline{\mathbf{k}}_2, \underline{\mathbf{k}}_3) = -(\mathbf{g}_2(\underline{\mathbf{x}}) - \underline{\mathbf{s}}_2) = \underline{\mathbf{o}} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \underline{\mathbf{k}}_3} &= \mathbf{h}_5(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{v}}, \underline{\mathbf{k}}_1, \underline{\mathbf{k}}_2, \underline{\mathbf{k}}_3) = -(\underline{\mathbf{l}}_b + \underline{\mathbf{v}} - \mathbf{f}(\underline{\mathbf{x}})) = \underline{\mathbf{o}} \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

die z.B. nach dem Newton-Verfahren gelöst werden können

$$\mathbf{f}(\underline{\mathbf{x}}) = \mathbf{f}(\underline{\mathbf{x}}_0) + \left[\frac{\partial \mathbf{f}(\underline{\mathbf{x}}_0)}{\partial \underline{\mathbf{x}}} \right] \underline{\Delta \mathbf{x}} = \underline{\mathbf{o}}. \quad (\text{A.8})$$

Die Unbekannten $\underline{\mathbf{x}}$ ergeben sich in einem iterativen Prozeß, wobei wir mit den Näherungswerten $\underline{\mathbf{x}}_0$ starten und die Zuschläge $\underline{\Delta \mathbf{x}}$ berechnen

$$\underline{\mathbf{x}}_1 = \underline{\mathbf{x}}_0 + \underline{\Delta \mathbf{x}} = \underline{\mathbf{x}}_0 - \left[\frac{\partial \mathbf{f}(\underline{\mathbf{x}}_0)}{\partial \underline{\mathbf{x}}} \right]^{-1} \mathbf{f}(\underline{\mathbf{x}}_0). \quad (\text{A.9})$$

Mit den Ableitungen, wobei

$$\mathbf{H}_{1(h,h)} = -\frac{\partial \mathbf{B}_2 \underline{\mathbf{k}}_2}{\partial \underline{\mathbf{x}}} + \frac{\partial \mathbf{A}^T \underline{\mathbf{k}}_3}{\partial \underline{\mathbf{x}}}$$

und $H_{2(n,n)} = \mathbf{P} - \frac{\partial \mathbf{B}_1 \mathbf{k}_1}{\partial \underline{\mathbf{v}}}$ ist,

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & \partial \underline{\mathbf{x}} & \partial \underline{\mathbf{v}} & \partial \underline{\mathbf{k}}_1 & \partial \underline{\mathbf{k}}_2 & \partial \underline{\mathbf{k}}_3 \\
 \hline
 \partial \mathbf{h}_1 & \mathbf{H}_1 & \mathbf{o} & \mathbf{o} & -\mathbf{B}_2 & \mathbf{A}^T \\
 \partial \mathbf{h}_2 & \mathbf{o} & \mathbf{H}_2 & -\mathbf{B}_1 & \mathbf{o} & -\mathbf{E} \\
 \partial \mathbf{h}_3 & \mathbf{o} & -\mathbf{B}_1^T & \mathbf{o} & \mathbf{o} & \mathbf{o} \\
 \partial \mathbf{h}_4 & -\mathbf{B}_2^T & \mathbf{o} & \mathbf{o} & \mathbf{o} & \mathbf{o} \\
 \partial \mathbf{h}_5 & \mathbf{A} & -\mathbf{E} & \mathbf{o} & \mathbf{o} & \mathbf{o}
 \end{array} \tag{A.10}$$

erhalten wir folgendes Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 & \mathbf{o} & \mathbf{o} & -\mathbf{B}_2 & \mathbf{A}^T \\ \mathbf{o} & \mathbf{H}_2 & -\mathbf{B}_1 & \mathbf{o} & -\mathbf{E} \\ \mathbf{o} & -\mathbf{B}_1^T & \mathbf{o} & \mathbf{o} & \mathbf{o} \\ -\mathbf{B}_2^T & \mathbf{o} & \mathbf{o} & \mathbf{o} & \mathbf{o} \\ \mathbf{A} & -\mathbf{E} & \mathbf{o} & \mathbf{o} & \mathbf{o} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\Delta \mathbf{x}} \\ \underline{\Delta \mathbf{v}} \\ \underline{\Delta \mathbf{k}}_1 \\ \underline{\Delta \mathbf{k}}_2 \\ \underline{\Delta \mathbf{k}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_2 \mathbf{k}_{20} - \mathbf{A}^T \mathbf{k}_{30} \\ -\mathbf{P} \underline{\mathbf{v}}_0 + \mathbf{B}_1 \mathbf{k}_{10} + \mathbf{k}_{30} \\ \mathbf{g}_1(\underline{\mathbf{l}}_b + \underline{\mathbf{v}}_0) - \underline{\mathbf{s}}_1 \\ \mathbf{g}_2(\underline{\mathbf{x}}_0) - \underline{\mathbf{s}}_2 \\ \underline{\mathbf{l}}_b + \underline{\mathbf{v}}_0 - \mathbf{f}(\underline{\mathbf{x}}_0) \end{bmatrix} \tag{A.11}$$

Zur Lösung dieses Gleichungssystems eignen sich besonders Hyper-Sparse-Algorithmen.

A.2 Die Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen

Bei der Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen gibt es keine Bedingungsgleichungen (A.1) zwischen den Beobachtungen und keine Bedingungsgleichungen (A.2) zwischen den Unbekannten. Die zu minimierende Funktion lautet mit den Veränderlichen $\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{v}}, \underline{\mathbf{k}}_3$

$$\Phi(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{v}}, \underline{\mathbf{k}}_3) = \underline{\mathbf{v}}^T \mathbf{P} \underline{\mathbf{v}} - 2 \underline{\mathbf{k}}_3^T (\underline{\mathbf{l}}_b + \underline{\mathbf{v}} - \mathbf{f}(\underline{\mathbf{x}})) \rightarrow \text{stat.} \tag{A.12}$$

Streichen wir die dritte und vierte Zeile bzw. Spalte des Gleichungssystems (A.11) erhalten wir mit $\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_2 = \mathbf{0}$, $\mathbf{H}_1 = \partial \mathbf{A}^T \underline{\mathbf{k}}_3 / \partial \underline{\mathbf{x}}$ und $\mathbf{H}_2 = \mathbf{P}$ folgendes Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 & \mathbf{o} & \mathbf{A}^T \\ \mathbf{o} & \mathbf{P} & -\mathbf{E} \\ \mathbf{A} & -\mathbf{E} & \mathbf{o} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\Delta \mathbf{x}} \\ \underline{\Delta \mathbf{v}} \\ \underline{\Delta \mathbf{k}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{A}^T \mathbf{k}_{10} \\ -(\mathbf{P} \underline{\mathbf{v}}_0 - \mathbf{k}_{10}) \\ \underline{\mathbf{l}}_b + \underline{\mathbf{v}}_0 - \mathbf{f}(\underline{\mathbf{x}}_0) \end{bmatrix}. \tag{A.13}$$

Multiplizieren wir die zweite Zeile mit \mathbf{A}^T von links und addieren sie zur ersten Zeile,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 & \mathbf{A}^T \mathbf{P} \\ \mathbf{A} & -\mathbf{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\Delta \mathbf{x}} \\ \underline{\Delta \mathbf{v}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{A}^T \mathbf{P} \underline{\mathbf{v}}_0 \\ \underline{\mathbf{l}}_b + \underline{\mathbf{v}}_0 - \mathbf{f}(\underline{\mathbf{x}}_0) \end{bmatrix} \tag{A.14}$$

werden die Unbekannte $\underline{\Delta \mathbf{k}}_3$ eliminiert. Anschließend multiplizieren wir die zweite Zeile mit $\mathbf{A}^T \mathbf{P}$ und addieren sie zur ersten Zeile und es ergeben sich die zu lösenden Gleichungen

$$(\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{H}_1) \underline{\Delta \mathbf{x}} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} (\underline{\mathbf{l}}_b - \mathbf{f}(\underline{\mathbf{x}}_0)). \tag{A.15}$$

Zur durchgreifenden Kontrolle des Ausgleichungsergebnisses setzen wir die berechneten Unbekannten \underline{x} , die Korrelaten \underline{k}_3 und die Verbesserungen \underline{v} in die Ausgangsgleichungen

$$\left. \begin{array}{l} A^T \underline{k}_3 = \underline{o} \\ P \underline{v} - \underline{k}_3 = \underline{o} \\ \underline{l}_b + \underline{v} - \underline{f}(\underline{x}) = \underline{o} \end{array} \right\} \Rightarrow A^T P \underbrace{(\underline{f}(\underline{x}) - \underline{l}_b)}_{\underline{v}} = \underline{o} \quad (\text{A.16})$$

und prüfen nach, ob diese erfüllt sind.

A.3 Die Ausgleichung nach bedingten Beobachtungen

Bei der Ausgleichung nach bedingten Beobachtungen gibt es keine Unbekannten \underline{x} , so daß die Bedingungsgleichungen (A.2) und (A.3) wegfallen. Die zu minimierende Funktion lautet mit den Veränderlichen $\underline{v}, \underline{k}_1$

$$\Phi(\underline{v}, \underline{k}_1) = \underline{v}^T P \underline{v} - 2 \underline{k}_1^T (g_1(\underline{l}_b + \underline{v}) - \underline{s}_1) \rightarrow \text{stat.} \quad (\text{A.17})$$

Streichen wir die erste, vierte und fünfte Zeile bzw. Spalte des Gleichungssystems (A.11) erhalten wir mit $\mathbf{A} = \mathbf{B}_2 = \mathbf{H}_1 = \mathbf{o}$ folgendes Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_2 & -\mathbf{B}_1 \\ -\mathbf{B}_1^T & \mathbf{o} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\Delta v} \\ \underline{\Delta k}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -P \underline{v}_0 + \mathbf{B}_1 \underline{k}_{10} \\ g_1(\underline{l}_b + \underline{v}_0) - \underline{s}_1 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.18})$$

Multiplizieren wir die erste Zeile mit $\mathbf{B}_1^T \mathbf{H}_2^{-1}$ und addieren sie zur zweiten Zeile, so ergeben sich die zu lösenden Gleichungen für $\underline{k}_1 = \underline{k}_{10} + \underline{\Delta k}_1$

$$\mathbf{B}_1^T \mathbf{H}_2^{-1} \mathbf{B}_1 \underline{k}_1 = \underline{s}_1 - g_1(\underline{l}_b + \underline{v}_0) + \mathbf{B}_1^T \mathbf{H}_2^{-1} P \underline{v}_0. \quad (\text{A.19})$$

Im allgemeinen setzen wir $\partial \mathbf{B}_1 \underline{k}_1 / \partial \underline{v}$ zu Null, damit $\mathbf{H}_2 = \mathbf{P}$ ist. Dies führt zur Lösung folgender nichtlinearen Gleichungen

$$\mathbf{B}_1^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{B}_1 \underline{k}_1 = \underline{s}_1 - g_1(\underline{l}_b + \underline{v}_0) + \mathbf{B}_1^T \underline{v}_0. \quad (\text{A.20})$$

Zur durchgreifenden Kontrolle des Ausgleichungsergebnisses setzen wir die berechneten Korrelaten \underline{k}_1 und die Verbesserungen \underline{v} in die Ausgangsgleichungen

$$P \underline{v} - \mathbf{B}_1 \underline{k}_1 = \underline{o} \quad (\text{A.21})$$

$$g_1(\underline{l}_b + \underline{v}) - \underline{s}_1 = \underline{o} \quad (\text{A.22})$$

ein und prüfen nach, ob diese erfüllt sind.

A.4 Die Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen mit Bedingungen zwischen den Unbekannten

Bei der Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen mit Bedingungen zwischen den Unbekannten gibt es keine Bedingungsgleichungen (A.1) zwischen den Beobachtungen.

$$\Phi(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{v}}, \underline{\mathbf{k}}_2, \underline{\mathbf{k}}_3) = \underline{\mathbf{v}}^T \mathbf{P} \underline{\mathbf{v}} - 2 \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{k}}_2^T & \underline{\mathbf{k}}_3^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{g}_2(\underline{\mathbf{x}}) - \underline{\mathbf{s}}_2 \\ \underline{\mathbf{l}}_b + \underline{\mathbf{v}} - \mathbf{f}(\underline{\mathbf{x}}) \end{bmatrix} \rightarrow \text{stat.} \quad (\text{A.23})$$

Streichen wir die dritte Zeile bzw. Spalte des Gleichungssystems (A.11) erhalten wir mit $\mathbf{B}_1 = \mathbf{o}$ und $\mathbf{H}_2 = \mathbf{P}$ folgendes Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 & \mathbf{o} & -\mathbf{B}_2 & \mathbf{A}^T \\ \mathbf{o} & \mathbf{P} & \mathbf{o} & -\mathbf{E} \\ -\mathbf{B}_2^T & \mathbf{o} & \mathbf{o} & \mathbf{o} \\ \mathbf{A} & -\mathbf{E} & \mathbf{o} & \mathbf{o} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\Delta \mathbf{x}} \\ \underline{\Delta \mathbf{v}} \\ \underline{\Delta \mathbf{k}}_2 \\ \underline{\Delta \mathbf{k}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_2 \underline{\mathbf{k}}_{20} - \mathbf{A}^T \underline{\mathbf{k}}_{30} \\ -\mathbf{P} \underline{\mathbf{v}}_0 + \underline{\mathbf{k}}_{30} \\ \mathbf{g}_2(\underline{\mathbf{x}}_0) - \underline{\mathbf{s}}_2 \\ \underline{\mathbf{l}}_b + \underline{\mathbf{v}}_0 - \mathbf{f}(\underline{\mathbf{x}}_0) \end{bmatrix}. \quad (\text{A.24})$$

Multiplizieren wir die vierte Zeile mit \mathbf{P} von links und addieren sie zur zweiten Zeile, erhalten wir dieses Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_1 & -\mathbf{B}_2 & \mathbf{A}^T \\ \mathbf{P} \mathbf{A} & \mathbf{o} & -\mathbf{E} \\ -\mathbf{B}_2^T & \mathbf{o} & \mathbf{o} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\Delta \mathbf{x}} \\ \underline{\Delta \mathbf{k}}_2 \\ \underline{\Delta \mathbf{k}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_2 \underline{\mathbf{k}}_{20} - \mathbf{A}^T \underline{\mathbf{k}}_{30} \\ \mathbf{P}(\underline{\mathbf{l}}_b - \mathbf{f}(\underline{\mathbf{x}}_0)) + \underline{\mathbf{k}}_{30} \\ \mathbf{g}_2(\underline{\mathbf{x}}_0) - \underline{\mathbf{s}}_2 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.25})$$

Anschließend multiplizieren wir die zweite Zeile mit \mathbf{A}^T von links und addieren sie zur ersten Zeile

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{H}_1 & -\mathbf{B}_2 \\ -\mathbf{B}_2^T & \mathbf{o} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\Delta \mathbf{x}} \\ \underline{\Delta \mathbf{k}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T \mathbf{P}(\underline{\mathbf{l}}_b - \mathbf{f}(\underline{\mathbf{x}}_0)) + \mathbf{B}_2 \underline{\mathbf{k}}_{20} \\ \mathbf{g}_2(\underline{\mathbf{x}}_0) - \underline{\mathbf{s}}_2 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.26})$$

Zur durchgreifenden Kontrolle des Ausgleichungsergebnisses setzen wir die berechneten Unbekannten $\underline{\mathbf{x}}$, die Korrelaten $\underline{\mathbf{k}}_2$, $\underline{\mathbf{k}}_3$ und die Verbesserungen $\underline{\mathbf{v}}$ in die Ausgangsgleichungen

$$\mathbf{B}_2 \underline{\mathbf{k}}_2 - \mathbf{A}^T \underline{\mathbf{k}}_3 = \mathbf{o} \quad (\text{A.27})$$

$$\mathbf{P}(\underline{\mathbf{l}}_b - \mathbf{f}(\underline{\mathbf{x}})) + \underline{\mathbf{k}}_3 = \mathbf{o} \quad (\text{A.28})$$

$$\mathbf{g}_2(\underline{\mathbf{x}}) - \underline{\mathbf{s}}_2 = \mathbf{o} \quad (\text{A.29})$$

ein und prüfen, ob diese erfüllt sind.

A.5 Die Ausgleichung nach bedingten Beobachtungen mit Unbekannten

Jetzt kann gezeigt werden, daß die Ausgleichung nach bedingten Beobachtungen ein Sonderfall der Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen mit Bedingungen zwischen den Unbekannten ist. Die Anzahl der Beobachtungen ist dann gleich der Anzahl der Unbekannten. Die ursprünglichen Beobachtungen $\underline{\mathbf{l}}_b$, zwischen denen die Bedingungsgleichungen gelten, entsprechen den Näherungswerten $\underline{\mathbf{x}}_0$. \mathbf{B}_1 und \mathbf{B}_2 sind deshalb identisch.

Setzen wir für die Unbekannten $\underline{\mathbf{x}}$ die ausgeglichenen Beobachtungen $\tilde{\underline{\mathbf{l}}}$, so lauten die Fehlergleichungen $\underline{\mathbf{l}}_b + \underline{\mathbf{v}} = \mathbf{f}(\underline{\mathbf{x}}) = \tilde{\underline{\mathbf{l}}}$. Die Jakobi-Matrix \mathbf{A} wird zur Einheitsmatrix \mathbf{E} . Da i.a. $\mathbf{H}_2 = \mathbf{P}$ ist, handelt es sich bei (A.18) und (A.26) um identische Gleichungssysteme.

Dies ist der Grund, weshalb die Ausgleichung nach bedingten Beobachtungen mit Unbekannten nicht ausgeführt wird. Das mathematische Modell kann immer auf die Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen mit Bedingungen zwischen den Unbekannten überführt werden und hat deshalb keine praktische Bedeutung mehr.

Beweise

B.1 Kräfteverlauf im Dreieck bei Minimalflächen

Der Beweis wird nur für den ersten Dreieckspunkt durchgeführt, da er für die beiden anderen Punkte analog erfolgt. Wir betrachten die ersten drei Gleichungen von (2.29) und definieren die Matrix \mathbf{B}

$$\underline{\mathbf{s}}_1 = \begin{bmatrix} s_{x_1} \\ s_{y_1} \\ s_{z_1} \end{bmatrix} = \sigma \begin{bmatrix} u_{12} & 0 & -u_{31} \\ v_{12} & 0 & -v_{31} \\ w_{12} & 0 & -w_{31} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \sigma \mathbf{B} \underline{\mathbf{q}} \quad (\text{B.1})$$

und benützen folgende Beziehung zwischen dem Kosinussatz und dem Skalarprodukt

$$2l_1 l_3 \cos \alpha = l_1^2 - l_2^2 + l_3^2 = -2(u_{12}u_{31} + v_{12}v_{31} + w_{12}w_{31}). \quad (\text{B.2})$$

Falls die erste Behauptung gilt, muß $\underline{\mathbf{s}}_1^T \underline{\mathbf{u}}_2 = 0$ sein

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{s}}_1^T \underline{\mathbf{u}}_2 &= \sigma [(u_{12} q_1 - u_{31} q_3) u_{23} + (v_{12} q_1 - v_{31} q_3) v_{23} + (w_{12} q_1 - w_{31} q_3) w_{23}] \\ &= \sigma [(u_{12} u_{23} + v_{12} v_{23} + w_{12} w_{23}) q_1 - (u_{31} u_{23} + v_{31} v_{23} + w_{31} w_{23}) q_3] \\ &= \frac{\sigma}{16F_\Delta} [(l_1^2 + l_2^2 - l_3^2)(-l_1^2 + l_2^2 + l_3^2) - (-l_1^2 + l_2^2 + l_3^2)(l_1^2 + l_2^2 - l_3^2)] \\ &= 0 \quad \text{q.e.d.} \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Der Betrag der Kraft ergibt sich

$$\|\underline{\mathbf{s}}_1\| = \{\underline{\mathbf{s}}_1^T \underline{\mathbf{s}}_1\}^{1/2} = \sigma \{\underline{\mathbf{q}}^T \mathbf{B}^T \mathbf{B} \underline{\mathbf{q}}\}^{1/2} = \frac{\sigma}{8F_\Delta} \{\underline{\mathbf{l}}^T \mathbf{L} \mathbf{M} \mathbf{B}^T \mathbf{B} \mathbf{M} \mathbf{L} \underline{\mathbf{l}}\}^{1/2} \quad (\text{B.4})$$

mit

$$\mathbf{B} \mathbf{M} = \begin{bmatrix} -u_{12} - u_{31} & u_{12} - u_{31} & u_{12} + u_{31} \\ -v_{12} - v_{31} & v_{12} - v_{31} & v_{12} + v_{31} \\ -w_{12} - w_{31} & w_{12} - w_{31} & w_{12} + w_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -u_{23} & u_{12} - u_{31} & u_{23} \\ -v_{23} & v_{12} - v_{31} & v_{23} \\ -w_{23} & w_{12} - w_{31} & w_{23} \end{bmatrix} \quad (\text{B.5})$$

erhalten wir die Matrix

$$\mathbf{M} \mathbf{B}^T \mathbf{B} \mathbf{M} = \begin{bmatrix} l_2^2 & -l_1^2 + l_3^2 & -l_2^2 \\ & 2l_1^2 - l_2^2 + 2l_3^2 & l_1^2 - l_3^2 \\ \text{sym.} & & l_2^2 \end{bmatrix}.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \|\underline{\mathbf{s}}_1\| &= \frac{\sigma}{8F_\Delta} \{ [l_1^2 l_2^2 + l_2^2 (-l_1^2 + l_3^2) - l_3^2 l_2^2] l_1^2 \\ &\quad + [l_1^2 (-l_1^2 + l_3^2) + l_2^2 (2l_1^2 - l_2^2 + 2l_3^2) + l_3^2 (l_1^2 - l_3^2)] l_2^2 \\ &\quad + [-l_1^2 l_2^2 + l_2^2 (l_1^2 - l_3^2) + l_3^2 l_2^2] l_3^2 \}^{1/2} \\ &= \frac{\sigma}{8F_\Delta} \{ l_2^2 [-l_1^4 - l_2^4 - l_3^4 + 2l_1^2 l_2^2 + 2l_1^2 l_3^2 + 2l_2^2 l_3^2] \}^{1/2} \\ &= \frac{\sigma}{8F_\Delta} \{ 16l_2^2 F_\Delta^2 \}^{1/2} = \frac{\sigma}{2} l_2 \quad \text{q.e.d.} \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Jetzt können wir folgende Ersatzbeobachtungen einführen

$$\underline{\mathbf{s}}_1 = \frac{\sigma}{8F_{\Delta}} \begin{bmatrix} u_{12} & 0 & -u_{31} \\ v_{12} & 0 & -v_{31} \\ w_{12} & 0 & -w_{31} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 \\ l_1^2 - l_2^2 + l_3^2 \\ l_1^2 + l_2^2 - l_3^2 \end{bmatrix} = \frac{\sigma l_2}{2h_2} \begin{bmatrix} x_1 - x_{H2} \\ y_1 - y_{H2} \\ z_1 - z_{H2} \end{bmatrix}. \quad (\text{B.7})$$

Für unser Beispieldreieck ergibt sich somit folgender Kräfteverlauf

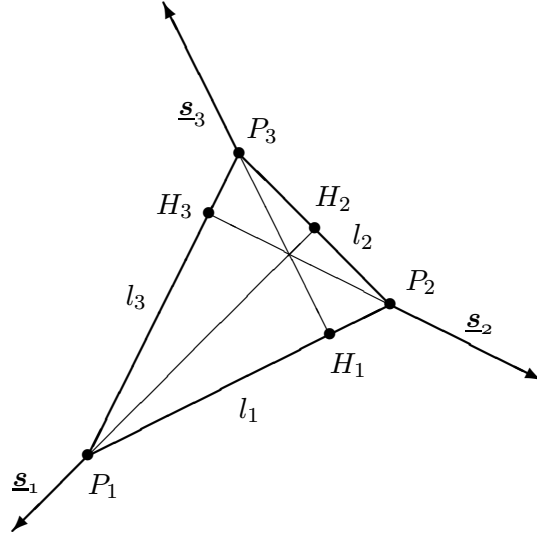


Abb. B.1 Kräfteverlauf im Dreieck

und wir erhalten mit den Höhen des Dreiecks h_1 , h_2 und h_3 diese 9 Ersatzbeobachtungen

$$\mathbf{C}^T \mathbf{U} \frac{\sigma}{8F_{\Delta}} \mathbf{M} \mathbf{L} \mathbf{l} = \underline{\mathbf{s}}_{(9,1)} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{s}}_1 \\ \underline{\mathbf{s}}_2 \\ \underline{\mathbf{s}}_3 \end{bmatrix} = \sigma \begin{bmatrix} \frac{l_2}{2h_2} \mathbf{u}_{1H2} \\ \frac{l_3}{2h_3} \mathbf{u}_{2H3} \\ \frac{l_1}{2h_1} \mathbf{u}_{3H1} \end{bmatrix} \quad [N]. \quad (\text{B.8})$$

Falls der Flächeninhalt des Dreiecks größer Null ist, muß ebenfalls jede Dreiecksseite größer als Null sein, und es wirkt an jedem Dreieckspunkt eine positive Kraft. Der Schnittpunkt der Höhen des Dreiecks kann bei ungünstigen Fällen auf einer Dreiecksseite oder außerhalb des Dreiecks liegen. Bei Minimalflächen erkennt man die Wirkung von drei neuen Kraftdichten an den Eckpunkten des Dreiecks, senkrecht zur gegenüberliegenden Seite $q_1 = q_2 = q_3 = s_1/l_2 = s_2/l_3 = s_3/l_1 = \sigma/2$. Diese drei neuen Kraftdichten repräsentieren denselben Kräfteverlauf innerhalb des Dreiecks, wie die Kraftdichten in (2.24), die sich auf die Dreiecksseiten beziehen.

B.2 Invariante Steifigkeitsmatrizen bei isotropem Material

Der ebene Dehnungszustand

$$\begin{aligned}\epsilon_{ww} &= \epsilon_{uu} = \epsilon_{vv} = 0 \quad , \\ \sigma_{ww} &= \nu(\sigma_{uu} + \sigma_{vv}) \neq 0\end{aligned}$$

wird durch die Matrix

$$\mathbf{M}_{ED} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ & 1-\nu & 0 \\ \text{sym.} & & 1-2\nu \end{bmatrix}, \quad (\text{B.9})$$

der ebene Spannungszustand

$$\begin{aligned}\sigma_{ww} &= \sigma_{uu} = \sigma_{vv} = 0 \quad , \\ \epsilon_{ww} &= \nu/(1-\nu)(\epsilon_{uu} + \epsilon_{vv}) \neq 0\end{aligned}$$

durch die Matrix

$$\mathbf{M}_{ES} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ & 1 & 0 \\ \text{sym.} & & 1-\nu \end{bmatrix} \quad (\text{B.10})$$

repräsentiert. Die freien Parameter sind der Elastizitätsmodul E und die Querdehnung ν . Unabhängig von der Lage des Dreiecks im lokalen Koordinatensystem ergeben sich für den Dehnungs- und Spannungszustand jeweils das identische Matrizenprodukt

$$\mathbf{N}_{ED} = \mathbf{T}^{-T} \mathbf{M}_{ED} \mathbf{T}^{-1} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{N}_{ES} = \mathbf{T}^{-T} \mathbf{M}_{ES} \mathbf{T}^{-1}.$$

Der Beweis vereinfacht sich, wenn wir die inverse Matrizen

$$\mathbf{N}_{ED}^{-1} = \mathbf{T} \mathbf{M}_{ED}^{-1} \mathbf{T}^T \quad \text{und} \quad \mathbf{N}_{ES}^{-1} = \mathbf{T} \mathbf{M}_{ES}^{-1} \mathbf{T}^T$$

betrachten. Mit der bekannten Beziehung zwischen dem Cosinussatz und dem Skalarprodukt

$$2l_1 l_2 \cos \alpha_3 = -2(u_{12}u_{23} + v_{12}v_{23}) = l_1^2 + l_2^2 - l_3^2 \quad ,$$

dem Vektorprodukt

$$2F_{\Delta} = u_{12}v_{23} - v_{12}u_{23}$$

und den Matrizen

$$\mathbf{M}_{ED}^{-1} = \frac{1+\nu}{E} \underbrace{\begin{bmatrix} 1-\nu & -\nu & 0 \\ & 1-\nu & 0 \\ \text{sym.} & & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{Q}_{ED}} \quad ; \quad \mathbf{M}_{ES}^{-1} = \frac{1}{E} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ & 1 & 0 \\ \text{sym.} & & 1+\nu \end{bmatrix}}_{\mathbf{Q}_{ES}}$$

erhalten wir

$$\begin{aligned}
\underline{\mathbf{t}}_1^T \mathbf{Q}_{ED} \underline{\mathbf{t}}_1 &= ((1-\nu)u_{12}^2 - \nu v_{12}^2) u_{12}^2 + (-\nu u_{12}^2 + (1-\nu) v_{12}^2) v + 2u_{12} v_{12} u_{12} v_{12} = (1-\nu) l_{12}^4 \\
\underline{\mathbf{t}}_2^T \mathbf{Q}_{ED} \underline{\mathbf{t}}_2 &= (1-\nu) l_{23}^4 \\
\underline{\mathbf{t}}_3^T \mathbf{Q}_{ED} \underline{\mathbf{t}}_3 &= (1-\nu) l_{31}^4 \\
\underline{\mathbf{t}}_1^T \mathbf{Q}_{ED} \underline{\mathbf{t}}_2 &= ((1-\nu) u_{12}^2 - \nu v_{12}^2) u_{23}^2 + (-\nu u_{12}^2 + (1-\nu) v_{12}^2) v_{23}^2 + 2u_{12} v_{12} u_{23} v_{23} \\
&= \underbrace{(u_{12} u_{23} + v_{12} v_{23})^2}_{-(l_1^2 + l_2^2 - l_3^2)/2} - \nu \underbrace{(u_{12}^2(u_{23}^2 + v_{23}^2) + v_{12}^2(u_{23}^2 + v_{23}^2))}_{l_{12}^2 l_{23}^2} \\
&= (+l_1^2 + l_2^2 - l_3^2)^2/4 - \nu l_{12}^2 l_{23}^2 \\
\underline{\mathbf{t}}_1^T \mathbf{Q}_{ED} \underline{\mathbf{t}}_3 &= (+l_1^2 - l_2^2 + l_3^2)^2/4 - \nu l_{31}^2 l_{12}^2 \\
\underline{\mathbf{t}}_2^T \mathbf{Q}_{ED} \underline{\mathbf{t}}_3 &= (-l_1^2 + l_2^2 + l_3^2)^2/4 - \nu l_{23}^2 l_{31}^2
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\underline{\mathbf{t}}_1^T \mathbf{Q}_{ES} \underline{\mathbf{t}}_1 &= (u_{12}^2 - \nu v_{12}^2) u_{12}^2 + (-\nu u_{12}^2 + v_{12}^2) v_{12}^2 + 2u_{12}^2 v_{12}^2 (1+\nu) = l_{12}^4 \\
\underline{\mathbf{t}}_2^T \mathbf{Q}_{ES} \underline{\mathbf{t}}_2 &= l_{23}^4 \\
\underline{\mathbf{t}}_3^T \mathbf{Q}_{ES} \underline{\mathbf{t}}_3 &= l_{31}^4 \\
\underline{\mathbf{t}}_1^T \mathbf{Q}_{ES} \underline{\mathbf{t}}_2 &= (u_{12}^2 - \nu v_{12}^2) u_{23}^2 + (-\nu u_{12}^2 + v_{12}^2) v_{23}^2 + 2u_{12}^2 v_{12}^2 (1+\nu) \\
&= \underbrace{(u_{12} u_{23} + v_{12} v_{23})^2}_{-(l_1^2 + l_2^2 - l_3^2)/2} - \nu \underbrace{(u_{12} v_{23} - v_{12} u_{23})^2}_{2F_\Delta^2} \\
&= (+l_1^2 + l_2^2 - l_3^2)^2/4 - 4\nu F_\Delta^2 \\
\underline{\mathbf{t}}_1^T \mathbf{Q}_{ES} \underline{\mathbf{t}}_3 &= (+l_1^2 - l_2^2 + l_3^2)^2/4 - 4\nu F_\Delta^2 \\
\underline{\mathbf{t}}_2^T \mathbf{Q}_{ES} \underline{\mathbf{t}}_3 &= (-l_1^2 + l_2^2 + l_3^2)^2/4 - 4\nu F_\Delta^2.
\end{aligned}$$

Die Matrizen \mathbf{N}_{ED}^{-1} und \mathbf{N}_{ES}^{-1} bestehen nur aus Invarianten l_1, l_2, l_3, F_Δ und bleiben deshalb konstant, falls E und ν fest vorgegeben sind.

B.3 Übergang von der Membran zur Minimalfläche

Beweis (1.- 6.): Mit der bekannten Formel

$$16F_\Delta^2 = \underline{\mathbf{l}}^T \mathbf{L} \mathbf{M}_{Min} \mathbf{L} \underline{\mathbf{l}} = 4(u_{12}v_{23} - u_{23}v_{12})^2,$$

der Matrix

$$\mathbf{M}_{Min} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ & -1 & 1 \\ \text{sym.} & & -1 \end{bmatrix}$$

und der Matrix

$$\mathbf{T} = \left[\underline{\mathbf{t}}_1, \underline{\mathbf{t}}_2, \underline{\mathbf{t}}_3 \right] = \begin{bmatrix} u_{12}^2 & v_{12}^2 & \sqrt{2}u_{12} v_{12} \\ u_{23}^2 & v_{23}^2 & \sqrt{2}u_{23} v_{23} \\ u_{31}^2 & v_{31}^2 & \sqrt{2}u_{31} v_{31} \end{bmatrix} = \left[\mathbf{U} \underline{\mathbf{u}}, \mathbf{V} \underline{\mathbf{v}}, \sqrt{2} \mathbf{U} \underline{\mathbf{v}} \right]$$

berechnen wir nun die einzelnen Elemente der Matrix $\mathbf{T}^T \mathbf{M}_{Min} \mathbf{T}$.

1. Da $u_{12} + u_{23} = -u_{31}$ ist, d.h. zwei Seiten des Dreiecks sind so lang wie die dritte Seite, ergibt sich der Flächeninhalt des Dreiecks zu Null

$$\underline{\mathbf{t}}_1^T \mathbf{M}_{Min} \underline{\mathbf{t}}_1 = \underline{\mathbf{u}}^T \mathbf{U} \mathbf{M}_{Min} \mathbf{U} \underline{\mathbf{u}} = 0.$$

2. Wegen $v_{12} + v_{23} = -v_{31}$ ist ebenfalls $\underline{\mathbf{t}}_2^T \mathbf{M}_{Min} \underline{\mathbf{t}}_2 = \mathbf{0}$.

3. Setzen wir für $\mathbf{L} \underline{\mathbf{l}} = \mathbf{U} \underline{\mathbf{u}} + \mathbf{V} \underline{\mathbf{v}}$, erhalten wir

$$\begin{aligned} 16F_{\Delta}^2 &= \underline{\mathbf{l}}^T \mathbf{L} \mathbf{M}_{Min} \mathbf{L} \underline{\mathbf{l}} = (\underline{\mathbf{u}}^T \mathbf{U} + \underline{\mathbf{v}}^T \mathbf{V}) \mathbf{M}_{Min} (\mathbf{U} \underline{\mathbf{u}} + \mathbf{V} \underline{\mathbf{v}}) \\ &= \underbrace{\underline{\mathbf{u}}^T \mathbf{U} \mathbf{M}_{Min} \mathbf{U} \underline{\mathbf{u}}}_{=0} + 2\underline{\mathbf{u}}^T \mathbf{U} \mathbf{M}_{Min} \mathbf{V} \underline{\mathbf{v}} + \underbrace{\underline{\mathbf{v}}^T \mathbf{V} \mathbf{M}_{Min} \mathbf{V} \underline{\mathbf{v}}}_{=0} \end{aligned}$$

$$\text{d.h. } \underline{\mathbf{t}}_1^T \mathbf{M}_{Min} \underline{\mathbf{t}}_2 = \underline{\mathbf{u}}^T \mathbf{U} \mathbf{M}_{Min} \mathbf{V} \underline{\mathbf{v}} = 8F_{\Delta}^2.$$

4. Für die nächsten Elemente benötigen wir einige Zwischenberechnungen wobei wir das Produkt $u_{31}v_{31} = u_{12}v_{12} + u_{12}v_{23} + u_{23}v_{12} + u_{23}v_{23}$ ersetzen

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{t}}_3^T \mathbf{M}_{Min} \underline{\mathbf{t}}_3 &= 2\underline{\mathbf{u}}^T \mathbf{V} \mathbf{M}_{Min} \mathbf{V} \underline{\mathbf{u}} \\ &= 2(-u_{12}v_{12} + u_{23}v_{23} + u_{31}v_{31})u_{12}v_{12} \\ &\quad + 2(+u_{12}v_{12} - u_{23}v_{23} + u_{31}v_{31})u_{23}v_{23} \\ &\quad + 2(+u_{12}v_{12} + u_{23}v_{23} - u_{31}v_{31})u_{31}v_{31} \\ &= 2(2u_{23}v_{23} + u_{12}v_{23} + u_{23}v_{12})u_{12}v_{12} \\ &\quad + 2(2u_{12}v_{12} + u_{12}v_{23} + u_{23}v_{12})u_{23}v_{23} \\ &\quad + 2(-u_{12}v_{23} - u_{23}v_{12})u_{31}v_{31} \\ &= 2(-u_{12}^2v_{23}^2 - u_{23}^2v_{12}^2 + 2u_{12}u_{23}v_{12}v_{23}) \\ &= -2(u_{12}v_{23} - u_{23}v_{12})^2 = -8F_{\Delta}^2. \end{aligned}$$

5. Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{t}}_1^T \mathbf{M}_{Min} \underline{\mathbf{t}}_3 &= \sqrt{2}\underline{\mathbf{u}}^T \mathbf{U} \mathbf{M}_{Min} \mathbf{U} \underline{\mathbf{v}} \\ &= \sqrt{2}(-u_{12}^2 + u_{23}^2 + u_{31}^2)u_{12}v_{12} \\ &\quad + \sqrt{2}(+u_{12}^2 - u_{23}^2 + u_{31}^2)u_{23}v_{23} \\ &\quad + \sqrt{2}(+u_{12}^2 + u_{23}^2 - u_{31}^2)u_{31}v_{31} \\ &\quad + \sqrt{2}(u_{12}u_{23}v_{12}(u_{23} + u_{12}) + u_{12}u_{23}v_{23}(u_{12} + u_{23}) - u_{12}u_{23}u_{31}v_{31}) \\ &= -\sqrt{2}u_{12}u_{23}u_{31}(\underbrace{v_{12} + v_{23}}_{=-v_{31}} + v_{31}) = 0. \end{aligned}$$

6. Ebenso ist $\underline{\mathbf{t}}_2^T \mathbf{M}_{Min} \underline{\mathbf{t}}_3 = 0$.

Multiplizieren wir die einzelnen Matrizenelemente mit $\sigma/(2F_{\Delta}^2)$ erhalten wir die gesuchte symmetrische Matrix

$$\mathbf{M}_{Mem} = 4\sigma \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 0 \\ \text{sym.} & & -1 \end{bmatrix}. \quad (\text{B.11})$$

Literaturverzeichnis

- [1] ARGYRIS, J. und MLEJNEK, H.-P.: *Methode der finiten Elemente*, Band I-III. Friedrich Vieweg & Sohn, Braunschweig Wiesbaden, 1986.
- [2] BAARDA, W.: *A Testing Procedure for Use in Geodetic Networks*. Netherlands Geodetic Commission (5), 1968.
- [3] BAHNDORF, J.: *Zur Systematisierung der Seilnetzrechnung und zur Optimierung von Seilnetzen*. Dissertation Universität Stuttgart, Deutsche Geodätische Kommission - Reihe C, Heft Nr. 373, München, 1991.
- [4] BAHNDORF, J., GRÜNDIG, L. und HANGLEITER, U.: *MEMCUT - A Strategy for Cutting Computations of Structural Membranes*. In: *3rd International Symposium on Wide Span Structures*, Stuttgart, 1985.
- [5] BOECK, R.: *Allgemeinste Formulierung der Ausgleichsrechnung nach der Methode der Kleinsten Quadrate*. Zeitschrift für Vermessungswesen (2), S. 43–45, S. 98–108, 1961.
- [6] BRONSTEIN, I. N. und SEMENDJAJEW, K. A.: *Taschenbuch der Mathematik*. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1987.
- [7] BUBNER, E., BAIER, B., KOENEN, R. und OELBERMANN, J.: *Minimalkonstruktionen*. Verlagsgesellschaft R. Müller, Köln-Braunsfeld, 1977.
- [8] BUFLER, H.: *Vorlesungen über Technische Mechanik*. Manuskript zur Vorlesung I–IV, Universität Stuttgart, 1980.
- [9] BUFLER, H.: *Vorlesungen über Energiemethoden*. Manuskript zur Vorlesung I, Universität Stuttgart, 1990.
- [10] BUFLER, H. und NGUYEN-TOUNG, B.: *On the Work Theorems in Nonlinear Network Theory*. Ingenieur-Archiv (1), S. 275–286, 1980.
- [11] BUFLER, H. und SCHNEIDER, H.: *Large strain analysis of rubber-like membranes under dead weight, gas pressure, and hydrostatic loading*. Computational Mechanics, S. 165–188, 1994.
- [12] DIERKES, U., HILDEBRANDT, S., KÜSTER, A. und WOHLRAB, O.: *Minimal Surfaces I+II*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1992.
- [13] DUSCHEK, A. und HOCHRAINER, A.: *Grundzüge der Tensorrechnung in analytischer Darstellung*, Band I-III. Springer-Verlag, Wien New York, 1970.
- [14] ESCHENAUER, H. und OLHOFF, N.: *Optimization Methods in Structural Design*. B.I.-Wissenschaftsverlag, Mannheim, 1983.
- [15] EVANS, D.J.: *Sparsity and its Applications*. Cambridge University Press, London, 1985.
- [16] FADDEEVA, V.N.: *Computational Methods of Linear Algebra*. Dover Publication, New York, 1959.
- [17] FENVES, S. und BRANIN, F.: *Network - Topological Formulation of Structural Analysis*. Journal of the Struct. Division, 1963.
- [18] FINSTERWALDER, S.: *Mechanische Beziehungen bei der Flächendeformation*. Jahresbericht der Deutschen Mathematischen Vereinigung, 6: S. 45–90, 1899.
- [19] GAUSS, C.F.: *Abhandlung zur Methode der Kleinsten Quadrate*. Physica-Verlag, Würzburg, 1887.
- [20] GIRKMANN, K.: *Flächentragwerke*. Springer-Verlag, Wien, 1963.
- [21] GRAFAREND, E.W.: *Kartenprojektionen*. Manuskript zur Vorlesung, Universität Stuttgart, 1988.

- [22] GROSSMANN, W.: *Grundzüge der Ausgleichsrechnung*. Springer-Verlag, Berlin, 1969.
- [23] GRÜNDIG, L.: *Die Berechnung vorgespannter Seil- und Hängenetze unter Berücksichtigung ihrer topologischen und physikalischen Eigenschaften und der Ausgleichsrechnung*. In: *SFB 64 Mitteilungen 34*, 1975.
- [24] GRÜNDIG, L.: *The 'force-density' Approach and Numerical Methods for the Calculation of Networks*. In: *3. Internationales Symposium 'Weitgespannte Flächentragwerke', Band 1*, S. 99–105, Stuttgart, 1985.
- [25] GRÜNDIG, L.: *Datenverwaltungskonzepte für typische Aufgaben aus der Ingenieurgeodäsie*. Habilitation Universität Stuttgart, Deutsche Geodätische Kommission - Reihe C, Heft Nr. 366, München, 1988.
- [26] GRÜNDIG, L. und BAHNDORF, J.: *Formfinding of a Roof Structure for a Health Spa*. In: *First International Conference of Light Weight Structures in Architecture*, Sydney, 1986.
- [27] GRÜNDIG, L. und BAHNDORF, J.: *The Design of Wide-Spann Roof Structures using Micro-Computer*. In: *3. International Conference on Civil and Structural Engineering Computing*, London, 1987.
- [28] GRÜNDIG, L., BAHNDORF, J. und NEUREITHER, M.: *Minimalflächenberechnung zur Formfindung von Membranen*. arcus, 1, 1987.
- [29] GRÜNDIG, L., BAHNDORF, J. und STRÖBEL, D.: *Hyper Sparse Techniques Applied to Geodetic Networks*. In: *7th International Symposium on Geodetic Computations*, Krakau, 1985.
- [30] GRÜNDIG, L., HANGLEITER, U., LÖW, K., NGUYEN, B. und PREUSS, H.D.: *FASNET - Eine Programmbibliothek zur Formfindung und statischen Berechnung von Seilnetzkonstruktionen*. In: *SFB 64 Mitteilungen 49*, 1978.
- [31] HAACK, W.: *Elementare Differentialgeometrie*. Birkhäuser-Verlag, Basel Stuttgart, 1955.
- [32] HABER, R.B. und ABEL, J.F.: *Initial Equilibrium Solution Methods for Cable Reinforced Membranes*. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* (30), S. 263–284, 1982.
- [33] HANGLEITER, U. und GRÜNDIG, L.: *Der Einfluß von Fehlern auf das Verhalten von Netzen*. In: *Internationales Symposium 'Weitgespannte Flächentragwerke'*, Stuttgart, 1976.
- [34] HANGLEITER, U., GRÜNDIG, L. und SCHEK, H.-J.: *Beitrag zu den Genauigkeitsanforderungen bei Seilnetzen Simulation von zufälligen Fehlern an den Olympiadächern*. *Der Stahlbau*, S. 1–9, 1974.
- [35] HESSE, O.: *Vorlesungen über Analytische Geometrie des Raumes*. B. G. Teubner Verlag, Leipzig, 1876.
- [36] HÖPCKE, W.: *Fehlerlehre und Ausgleichsrechnung*. De Gruyter Verlag, Berlin New York, 1980.
- [37] HUSS, H.J.: *Berechnung von Membranen mit der Methode der finiten Elemente*. Diplomarbeit, Institut für Anwendungen der Geodäsie im Bauwesen, Universität Stuttgart, 1989.
- [38] KARCHER, H. und POLTHIER, K.: *Die Geometrie von Minimalflächen*. *Spektrum der Wissenschaft*, Oktober 1990.
- [39] KMIECIK, M., PFAU, H., WIEBECK, E. und WIZMUR, M.: *Nichtlineare Berechnung ebener Flächentragwerke*. Verlag für Bauwesen, Berlin, 1993.
- [40] LAGRANGE, J. L.: *Essai d'une nouvelle méthode pour déterminer les maxima et les minima des formules intégrales définies*, Band 2. *Miscellanea Taurinensia*, Turin, 1760.
- [41] LAWO, M. und THIERAUF, G.: *Stabtragwerke - Matrizenmethoden der Statik und Dynamik*. Vieweg Verlag, Braunschweig, 1980.

- [42] LEONHARDT, F.: *Ingenieurbau*. Carl Habel Verlag, Darmstadt, 1974.
- [43] LINKWITZ, K.: *Über die Systematik verschiedener Formen der Ausgleichsrechnung*. Zeitschrift für Vermessungswesen (5), 1960.
- [44] LINKWITZ, K.: *Fehlertheorie und Ausgleichung von Streckennetzen nach der Theorie elastischer Systeme*. Dissertation Technische Hochschule München, Deutsche Geodätische Kommission - Reihe C, Heft Nr. 46, München, 1961.
- [45] LINKWITZ, K.: *Über den Einfluß verschiedener Gewichtsannahmen auf das Ausgleichungsergebnis bei bedingten Beobachtungen*. Zeitschrift für Vermessungswesen (7), 1961.
- [46] LINKWITZ, K.: *Über die nachträgliche Berücksichtigung von Beobachtungen bei der Ausgleichung von vermittelnden Beobachtungen*. Zeitschrift für Vermessungswesen (11), 1968.
- [47] LINKWITZ, K.: *Über eine neue Anwendung der Gauss'schen Methode der kleinsten Quadrate: Die Formfindung und statische Analyse von räumlichen Seil- und Hängennetzen*. Sonderdruck XXVII, Wissenschaftliche Gesellschaft Braunschweig, 1977.
- [48] LINKWITZ, K.: *Least-Squares Methods as a Tool to Calculate and Optimization of Design of Prestressed Nets and Hanging Nets*. Technischer Bericht, Akademia Kiado, Budapest, 1979.
- [49] LINKWITZ, K.: *Ausgleichsrechnung*. Manuskript zur Vorlesung, Universität Stuttgart, 1984.
- [50] LINKWITZ, K.: *Formfinding and Analysis of Cable Net Structures*. In: *3. Internationales Symposium 'Weitgespannte Flächentragwerke'*, S. 85–94, Stuttgart, 1985.
- [51] LINKWITZ, K. und BAHNDORF, J.: *Optimierung von Bauformen aus mathematisch-geodätischer Sicht*. arcus (6), 1985.
- [52] LINKWITZ, K., GRÜNDIG, L., BAHNDORF, J., J. NEUREITHER, M. und STRÖBEL, D.: *Strategies for Formfinding and Design of Cutting-patterns for large sensitive Membrane Structures*. In: *International Conference on Design and Construction of non-conventional Structures*, London, 1987.
- [53] LINKWITZ, K., GRÜNDIG, L., HANGLEITER, U. und BAHNDORF, J.: *Mathematisch-numerische Netzberechnung*. In: *SFB 64 Mitteilungen 72. Abschlußbericht Teilprojekt F2*, Stuttgart, 1985.
- [54] LINKWITZ, K. und SCHEK, H.J.: *Einige Bemerkungen zur Berechnung von vorgespannten Seilnetz-Konstruktionen*. Ingenieur-Archiv (4), S. 145–158, 1971.
- [55] MODENOV, P.S., PARKHOMENKO, A.S., WIEBECK, E. und WIZMUR, M.: *Geometric Transformations*. Academic Press, New York London, 1965.
- [56] NEUREITHER, M.: *Modellierung geometrischer-topologischer Daten zur Beschreibung und Berechnung netzartiger und flächenartiger Strukturen*. Dissertation Universität Stuttgart, Deutsche Geodätische Kommission - Reihe C, Heft Nr. 387, München, 1992.
- [57] NGUYEN, B.: *Eine nichtlineare Stabwerkstheorie und ihre Anwendungen zur Lösung von Problemen weitgespannter Flächentragwerke*. In: *SFB 64 Mitteilungen 52*, 1980.
- [58] NITSCHKE, J.C.C.: *Vorlesungen über Minimalflächen*. Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1975.
- [59] OTTO, F.: *Minimalnetze*. In: *IL 1. Mitteilungen des Instituts für Leichte Flächentragwerke*, Stuttgart, 1969.
- [60] OTTO, F.: *Netze in Natur und Technik*. In: *IL 8. Mitteilungen des Instituts für Leichte Flächentragwerke*, Stuttgart, 1975.
- [61] OTTO, F.: *Lufthallenhandbuch*. In: *IL 15. Mitteilungen des Instituts für Leichte Flächentragwerke*, Stuttgart, 1983.

- [62] PERRIER, G.: *Wie der Mensch die Erde gemessen und gewogen hat*. Fränkischer Tag GmbH, Bamberg, 1949.
- [63] PLATEAU: *Recherches expérimentales et théoriques sur les figures d'équilibre d'une masse liquide sans pesanteur*. Technischer Bericht, Mém. Acad. roy. Belgique, 1866.
- [64] PRAGER, W.: *Einführung in die Kontinuumsmechanik*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1961.
- [65] PRAGER, W.: *Introduction to Structural Optimization*. Springer Verlag, Wien, 1974.
- [66] RAMM, E.: *Beitrag zur praktischen Berechnung dünner Kugelschalen bei nicht rotationssymmetrischer Berandung nach der linearen Biegetheorie*. Dissertation Universität Stuttgart, 1972.
- [67] RAMM, E.: *Vorlesungen über Stabtragwerke*. Manuskript zur Vorlesung I–IV, Universität Stuttgart, 1985.
- [68] SCHEK, H.J.: *Ergänzungen zur Ausgleichsrechnung*. Manuskript zur Vorlesung, Universität Stuttgart, 1974.
- [69] SCHEK, H.J.: *The Force Densities Method for Form Finding and Computation of General Networks*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering (3), S. 115–134, 1974.
- [70] SCHEK, H.J.: *Least-Squares-Lösungen und optimale Dämpfung bei nichtlinearen Gleichungssystem im Zusammenhang mit der bedingten Ausgleichung*. Zeitschrift für Vermessungswesen (2), 1975.
- [71] SCHEK, H.J.: *Über Ansätze und numerische Methoden zur Berechnung großer netzartiger Strukturen*. Habilitation Universität Stuttgart, 1976.
- [72] SCHEK, H.J. und MAIER, H.: *Nichtlineare Normalgleichungen zur Bestimmung der Unbekannten und deren Kovarianzmatrix*. Zeitschrift für Vermessungswesen (4), 1976.
- [73] SCHEK, H.-J., STEIDLER, F. und SCHAUER, U.: *Ausgleichung großer geodätischer Netze mit Verfahren für schwach besetzte Matrizen*. Technischer Bericht, Deutsche Geodätische Kommission, Reihe A, München, 1977.
- [74] SCHMID, A. und SCHWEIZER, W.: *Analytische Geometrie mit linearer Algebra*. Ernst Klett Verlag, Stuttgart, 1988.
- [75] SCHWARZ, H.R.: *Methode der finiten Elemente*. Teubner-Verlag, Stuttgart, 1980.
- [76] SCHWARZ, H.R.: *Fortran-Programm zur Methode der finiten Elemente*. Teubner-Verlag, Stuttgart, 1981.
- [77] SCHWARZ, H.R., RUTISHAUSER, H. und STIEFEL, H.: *Numerik symmetrischer Matrizen*. Teubner-Verlag, Stuttgart, 1972.
- [78] SINGER, P.: *Formfindung und statische Berechnung von Membranen mit der Kraftdichtemethode*. Diplomarbeit, Institut für Anwendungen der Geodäsie im Bauwesen, Universität Stuttgart, 1988.
- [79] STARK, W.: *Untersuchung zur Lösung und Inversion schwach besetzter großer geodätischer Normalgleichungen*. Dissertation Universität Stuttgart, Deutsche Geodätische Kommission - Reihe C, Heft Nr. 301, München, 1985.
- [80] STRÖBEL, D.: *Entwicklung von Hypersparsetechniken zur Gleichungslösung für Probleme in der Ausgleichsrechnung und der Statik*. Diplomarbeit, Institut für Anwendungen der Geodäsie im Bauwesen, Universität Stuttgart, 1984.
- [81] THOMPSON, D., W.: *Über Wachstum und Form*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1973.
- [82] TIMOSHENKO, S.P. und GOODIER, J.N.: *Theory of Elasticity*. McGraw-Hill Book Co, Singapore, 1982.

- [83] TRENKLE, J.: *Vorgespannte Membrankonstruktionen, Statische Untersuchungen mit Berücksichtigung von Schub und Querdehnung*. Diplomarbeit, Institut für Anwendungen der Geodäsie im Bauwesen, Universität Stuttgart, 1993.
- [84] WAIBEL, A.: *Berechnung pneumatisch vorgespannter Membrankonstruktionen*. Diplomarbeit, Institut für Anwendungen der Geodäsie im Bauwesen, Universität Stuttgart, 1991.
- [85] WOLF, H.: *Ausgleichsrechnung*, Band I+II. Ferdinand Dümmlers Verlag, Bonn, 1975.
- [86] ZIENKIEWICZ, O.C.: *The Finite Element Method in Engineering Science*. McGraw-Hill Book Co, London, 1971.
- [87] ZIMMERMANN, K.: *Nichtlineare Theorie von Membranen und die Berechnung nach einer Finite-Differenzen-Energie-Methode*. In: *SFB 64 Mitteilungen 76*, 1986.
- [88] ZURMÜHL, R.: *Matrizen*. Springer Verlag, Berlin Göttingen Heidelberg, 1964.
- [89] ZUSE, K.: *Der Computer, mein Lebenswerk*. Verlag Moderne Industrie, München, 1970.

Lebenslauf

- 25.09.1963 geboren in Benningen am Neckar
- Sept. 1969 - Juli 1973 Besuch der Grundschule in Benningen am Neckar
- Sept. 1973 - Juli 1982 Besuch des Friedrich-Schiller-Gymnasiums in Marbach am Neckar
- 14.05.1982 Zeugnis über Allgemeine Hochschulreife
- Juni 1982 - Sept. 1982 13-wöchiges Praktikum zur Technischen-Gewerblichen-Ausbildung bei der Robert Bosch GmbH in Stuttgart Feuerbach
- Okt. 1982 - Okt. 1983 Grundwehrdienst
- Okt. 1983 - Jan. 1989 Studium des Vermessungswesens an der Universität Stuttgart
- Mai 1987 - Jan. 1988 Unterbrechung des Studiums, Wissenschaftlicher Mitarbeiter bei der Forschungsgesellschaft, Meß- und Rechentechnik mbH in Leonberg, Softwareentwicklung und Installation von Programmen im Auftrag der Schweizer Bundesbahn
- 14.09.1989 Zeugnis über die Diplomhauptprüfung
- seit 01.05.1989 Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Anwendungen der Geodäsie im Bauwesen der Universität Stuttgart bei Prof. Linkwitz im Rahmen des Sonderforschungsbereichs 230 (Natürliche Konstruktionen)